



دانشگاه سindh
پم

هندسه جبری ۱

(کارشناسی ارشد رشته ریاضی)

دکتر مجید اقبالی دکتر خدیجه احمدی آملی

«امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.»^۱

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چند هزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

۱. پیام مقام معظم رهبری به مناسبت آغاز هفته کتاب ۷۲/۱۰/۴

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «إِقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

پیشگفتار	نه
فصل اول . چندگونه‌ها	۱
هدف‌های کلی	۱
هدف‌های یادگیری	۱
مقدمه	۱
۱-۱ چندگونه‌های آفین	۲
۱-۱-۱ توابع	۱۰
۲-۱-۱ نمونه‌های بیشتر	۱۸
۳-۱-۱ پرسش‌ها	۲۰
۲-۱ چندگونه‌های تصویری	۲۳
۳-۱ پرسش‌ها	۳۰
فصل دوم . ریختبری‌ها و توابع منظم	۳۳
هدف‌های کلی	۳۳
هدف‌های یادگیری	۳۳

۳۴	۱-۲ توابع روی چندگوناها
۳۴	۱-۱-۲ توابع روی چندگونا‌های آفین-سا
۳۷	۲-۱-۲ توابع منظم روی چندگونا‌های تصویر-سا
۵۲	۲-۲ نگاشت‌های چندجمله‌ای
۵۴	۳-۲ نگاشت‌های چندجمله‌ای و جبرها
۵۶	۴-۲ نمونه‌های بیشتر
۶۰	۵-۲ پرسش‌ها

۶۳	فصل سوم . نگاشت‌های گویا
۶۳	هدف‌های کلی
۶۳	هدف‌های یادگیری
۶۴	مقدمه
۶۴	۱-۳ حاصل ضرب سگره
۷۰	۲-۳ نگاشت‌های گویا
۸۲	۳-۳ نمونه‌های بیشتر
۸۶	۴-۳ پرسش‌ها

۸۹	فصل چهارم . فراگستری و تکینگی
۸۹	هدف‌های کلی
۸۹	هدف‌های یادگیری
۹۰	مقدمه
۹۰	۱-۴ فراگستری یک چندگونا (نگاه نخست)
۹۷	۲-۴ فراگستری یک چندگونا (نگاه دوم)
۱۰۲	۳-۴ چندگونا‌های تکین و ناتکین
۱۰۹	۱-۳-۴ نمونه‌های بیشتر
۱۱۳	۴-۴ پرسش‌ها

۱۱۵	فصل پنجم . فضای مماس یک چندگونا
۱۱۵	هدف‌های کلی
۱۱۵	هدف‌های یادگیری
۱۱۶	مقدمه
۱۱۶	۱-۵ چندگانگی برخورد و فضای مماس
۱۲۶	۲-۵ نقاط ناتکین
۱۲۹	۳-۵ نمونه‌های بیشتر
۱۳۱	۴-۵ پرسش‌ها

۱۳۵	فصل ششم . پیش‌درآمدی بر انگاره
۱۳۵	هدف‌های کلی
۱۳۵	هدف‌های یادگیری
۱۳۶	مقدمه
۱۳۷	۱-۶ طیف یک حلقه
۱۳۹	۲-۶ ویژگی‌های فضای توپولوژیک <i>SpecA</i>
۱۴۲	۳-۶ یک تابع گون پادورد
۱۴۵	۴-۶ نمونه‌های بیشتر
۱۴۷	۵-۶ پرسش‌ها

۱۵۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۵۴	منابع

پیشگفتار

در کتابی که پیش رو دارید، برآنیم تا جستارهایی از هندسه جبری را بررسی کرده و به شما بشناسانیم که دریچه‌ای برای ورود به این شاخه از ریاضیات است. این شاخه یکی از شاخه‌های پرکاربرد در سده کنونی است که توانسته است در شاخه‌های دیگر ریاضیات اثرگذار باشد. هندسه جبری را می‌توان برآیندی از جبر و جبرخطی دانست. چراکه به گونه‌ای بررسی دستگاه معادلات چندجمله‌ای‌ها و به زبان ساده‌تر، ریشه‌های این معادلات با چندین متغیر است. هندسه جبری نوین بر پایه استفاده از روش‌های جبری و به ویژه جبر جابجایی در پرسش‌های هندسی، استوار است.

پیشینه هندسه جبری یا به زبان دقیق‌تر هندسه، به یونان باستان می‌رسد. سپس به وسیله ریاضی‌دانان ایرانی و مسلمان از جمله خوارزمی در حل معادلات درجه دوم و نیز عمر خیام که به رده‌بندی و حل معادلات درجه سوم به کمک روش‌های هندسی پرداخت، گسترش یافت. نوزایی هندسه جبری در میانه‌های سده هفدهم میلادی با کارهایی از فرما^۱ و دکارت^۲ آغاز گشت و با رده‌بندی خم‌های درجه دوم و نیز با کارهای نیوتن^۳ در رده‌بندی خم‌های درجه سوم گسترش یافت. پس از آن‌ها و در سده هجدهم اوایل^۴ به رده‌بندی خم‌های درجه چهارم

1. Fermat
2. Descartes
3. Newton
4. Euler

پرداخت و در سده نوزدهم، ریمان^۵ به مطالعه دوسوگوییها پرداخته و هندسه جبری را به جایگاه ویژه‌ای در میان دیگر شاخه‌های ریاضیات رساند.

سده بیستم، بیشتر به شناخت ساختارها و اشیاء در هندسه جبری سپری گشت که سرآمد آن تلاش‌های گروتندیک^۶ در این باره بود که در این کتاب نمی‌توان بدان‌ها پرداخت.

شالوده این کتاب بر پایه آموزش هندسه جبری به وسیله گردآورندگان، در چندین نیم‌سال تحصیلی است. تلاش ما بر آن بوده که مطالب پیچیده هندسه جبری را به زبانی ساده‌تر و با آوردن نمونه‌های گوناگون گیراتر کنیم. برای این کار ما کتاب هندسه جبری نوشته روبین هارتشورن^۷ را پیش روی خود داشته‌ایم و نیز از کتاب‌های دیگر که در پایان کتاب از آن‌ها یاد شده است، بهره فراوان برده‌ایم. همچنین، از دست‌نوشته‌های روانشاد آنتونی گرامیتا^۸ در نگارش کتاب بسیار استفاده کرده‌ایم. نکته دیگری که در اینجا بر آن پای فشرده‌ایم استفاده ما از واژگان مناسب پارسی هم‌ارز واژگان انگلیسی تخصصی است که در جای جای این کتاب دیده می‌شود. برخی از واژگان را از کتاب‌هایی که به پارسی برگردانده شده‌اند وام گرفته‌ایم در حالی که برای برخی دیگر ساعت‌ها زمان سپری شده تا واژه شایسته برساخته شود. بی‌شک این نوشته پر از کاستی‌های بسیار است. از خوانندگان و استادان ارجمند خواهشمندیم هر گونه پیشنهادی که برای بهتر کردن این نوشته به کار می‌آید را به آگاهی گردآورندگان برسانند.

در پایان، سرافرازانه این نوشته ناچیز را به استاد سخن، خردمند توس، فردوسی بزرگ پیشکش می‌کنیم.

مجید اقبالی، عضو هیات علمی دانشگاه تفرش

خدیجه احمدی آملی، عضو هیات علمی دانشگاه پیام‌نور

زمستان ۹۸

5. Riemann

6. Grothendieck

7. Hartshorne

8. Geramita

فصل اول

چندگوناها

هدف‌های کلی

در این فصل، به چندگونا‌های آفین و تصویری و نیز زیرمجموعه‌های باز آن‌ها یعنی چندگونا‌های آفین-سا و تصویر-سا می‌پردازیم.

هدف‌های یادگیری

دانشجویان پس از خواندن این فصل:

۱. چندگونا‌های آفین و تصویری و حلقه مختصات آن‌ها را خواهند شناخت.
۲. ویژگی‌های توپولوژیک این چندگونا‌ها را خواهند شناخت.

مقدمه

در این بخش، به یادآوری برخی مفاهیم شناخته شده مانند چندگونا‌های آفین و تصویری که در دوره کارشناسی بدان‌ها پرداخته شده است می‌پردازیم.

۱-۱ چندگونا‌های آفین

در سراسر این کتاب، میدان k را میدان بسته جبری می‌گیریم مگر اینکه بسته جبری نبودن میدان یادآوری شود.

برای عدد طبیعی n و هر میدان k ، n -فضای آفین روی k را با نماد A_k^n یا به طور ساده با A^n نمایش داده که برابر است با مجموعه n تایی‌هایی از عناصر k . یک عنصر $P \in A^n$ که یک نقطه نامیده می‌شود را به صورت $P = (a_1, \dots, a_n)$ نمایش می‌دهیم که در آن $a_i \in k$ است. در این صورت، a_i را مختصات نقطه P می‌نامیم.

فرض کنید $A = k[x_1, \dots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها با n متغیر روی میدان k باشد. عناصر A را به صورت توابعی از n -فضای آفین A^n به روی k می‌توان دید که به صورت

$$f(P) = f(a_1, \dots, a_n)$$

تعریف می‌شود که در آن $f \in A$ و $P \in A^n$. بنابراین، برای یک چندجمله‌ای مانند $f \in A$ ، می‌توان مجموعه ریشه‌های f که معمولاً صفرهای f نامیده می‌شود را بررسی کرد. مجموعه صفرهای f را به صورت

$$Z(f) = \{P \in A^n \mid f(P) = 0\}$$

نمایش می‌دهیم. به طور کلی، برای زیرمجموعه‌ای مانند T از A ، مجموعه صفرهای T را به صورت صفرهای مشترک همه عناصر T تعریف می‌کنیم؛ یعنی

$$Z(T) = \{P \in A^n \mid f(P) = 0, \forall f \in T\}.$$

نمونه ۱-۱. مجموعه $Z(x^2 + y^2 - 1)$ از A_k^2 دایره‌ای به مرکز $(0, 0)$ و شعاع ۱ است و

$Z(xy)$ اجتماع دو محور x ها و y ها در $\mathbf{A}_k^\vee$ است.

پرسش ۱-۲. فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از A باشد که توسط T تولید شود. نشان دهید:

$$Z(T) = Z(\mathfrak{a}).$$

چون A حلقه‌ای نوتری است پس هر ایده‌آل $\mathfrak{a}$ تعداد متناهی مولد مانند $f_1, \dots, f_r$ دارد. پس $Z(T)$ را می‌توان به صورت صفرهای مشترک تعدادی متناهی از چندجمله‌ای‌های $f_1, \dots, f_r$ نوشت. قضیه پایه‌ای هیلبرت که در زیر بدون اثبات آن را خواهیم آورد نشان‌دهنده این است که هر k -جبر متناهی مولد به ازای هر میدان k ، یک حلقه نوتری است. یعنی هر k -جبر متناهی مولد، حلقه‌ای به شکل $A = k[a_1, \dots, a_n]$ است. پس A به عنوان یک حلقه با k و $a_1, \dots, a_n$ تولید می‌شود. آشکار است که یک چنین حلقه‌ای با حلقه خارج‌قسمتی چندجمله‌ای‌ها یکرخت است؛ یعنی

$$A \cong \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{\mathfrak{a}}$$

که $\mathfrak{a}$ ایده‌آل حلقه $k[x_1, \dots, x_n]$ است.

قضیه ۱-۳. اگر A یک حلقه نوتری باشد، آنگاه حلقه چندجمله‌ای‌های روی x با ضرایب در A یعنی $A[x]$ نیز حلقه‌ای نوتری است.

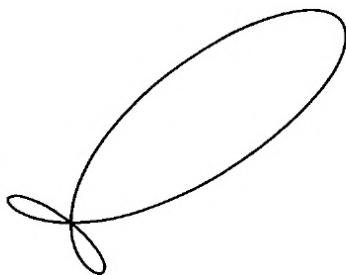
تعریف ۱. یک زیرمجموعه Y از $\mathbf{A}^n$ را یک **مجموعه جبری آفین** گویند هرگاه یک زیرمجموعه $T \subseteq A$ چنان یافت شود که $Y = Z(T)$ است.

به طور نمونه، $Z((x_1, x_2)) \subseteq \mathbf{A}^n$ یک خط در فضای سه‌بعدی می‌باشد. همچنین، مجموعه

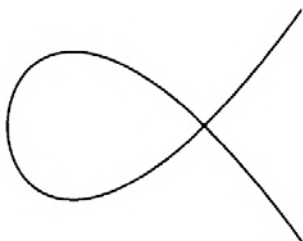
$$\{(x, y) \in \mathbf{A}_{\mathbb{C}}^\vee \mid x = \cos t, y = \sin t, t \in \mathbb{C}\} = Z(x^2 + y^2 - 1)$$

که دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ است نیز یک مجموعه جبری است.

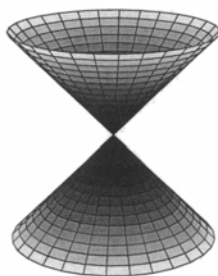
علاوه بر این، شکل‌هایی که در زیر نمایش داده شده‌اند نیز سه مجموعه جبری هستند.



شکل ۱-۱. $Z(x^2y + xy^2 - x^2 - y^2) \subset \mathbb{C}^2$



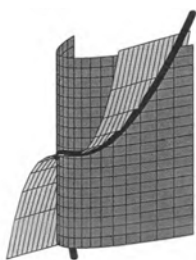
شکل ۲-۱. $Z(y^2 - x^2 - x^3) \subset \mathbb{C}^2$



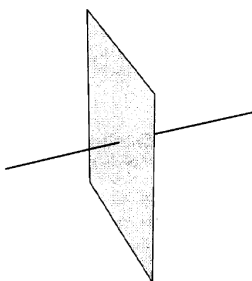
شکل ۳-۱. $Z(x^2 + y^2 - z^2) \subset \mathbb{C}^3$

گزاره ۱-۴. اجتماع دو مجموعه جبری، یک مجموعه جبری است. اشتراک هر تعداد از مجموعه‌های جبری، یک مجموعه جبری است. مجموعه تهی و تمام فضا یعنی A^n ، مجموعه‌های جبری می‌باشند.

شکل‌های زیر به ترتیب اشتراک و اجتماع دو مجموعه جبری را نشان می‌دهند.



شکل ۱-۴. $Z(x^2 - y, x^2 - z) = Z(x^2 - y) \cap Z(x^2 - z)$



شکل ۱-۵. $Z(y, z) \cup Z(x) = Z(xy, xz)$

تعریف ۲. توپولوژی زاریسکی روی A^n را با برگزیدن زیرمجموعه‌های باز که مکمل زیرمجموعه‌های جبری هستند تعریف می‌کنیم. این یک توپولوژی است زیرا بنابر گزاره ۱-۴، اشتراک دو مجموعه باز، مجموعه‌ای باز است و اجتماع هر تعداد از مجموعه‌های باز، باز است. همچنین، مجموعه تهی و تمام فضا هر دو بازند.

این توپولوژی به ازای هر میدان k ، روی A_k^n تعریف می‌شود.

نمونه ۱-۵. توپولوژی زاریسکی خط آفین یعنی A^1 را بررسی می‌کنیم. هر ایده‌آل از $A = k[x]$ اصلی است پس هر مجموعه جبری، مجموعه صفرهای یک چندجمله‌ای است. چون k یک میدان بسته جبری است، پس هر چندجمله‌ای ناصفر $f(x)$ را می‌توان به صورت

$$f(x) = c(x - a_1) \dots (x - a_n)$$

تجزیه کرد که $c, a_1, \dots, a_n \in k$ می‌باشند. بنابراین، $Z(f) = \{a_1, \dots, a_n\}$ خواهد بود.

در نتیجه، مجموعه‌های جبری در A^1 ، زیرمجموعه‌های متناهی (شامل مجموعه تهی) و تمام فضا یعنی A^1 (که متناظر با $f = 0$ است) می‌باشد. پس مجموعه‌های باز توپولوژی، مجموعه تهی و مکمل زیرمجموعه‌های متناهی است. لازم به یادآوری است که این توپولوژی هاوسدورف نیست.

هنگامی که $k = \mathbb{C}$ ، میدان اعداد مختلط باشد، ما دو توپولوژی مختلف روی $A^1_{\mathbb{C}}$ داریم: یکی توپولوژی زاریسکی و دیگری توپولوژی اقلیدسی. هر مجموعه بسته در توپولوژی زاریسکی، یک مجموعه بسته در توپولوژی اقلیدسی است اما عکس آن درست نیست. چرا؟ توپولوژی زاریسکی روی خط آفین $A^1_{\mathbb{C}}$ هاوسدورف نیست، چون هیچ دو مجموعه باز ناتهی در $A^1_{\mathbb{C}}$ جدا از هم نیستند.

تعریف ۳. فضای توپولوژیک Y را **تحویل ناپذیر** نامند هرگاه Y را نتوان به صورت اجتماع

$$Y = Y_1 \cup Y_2$$

از دو زیرمجموعه سره Y نوشت که Y_1 و Y_2 در Y بسته‌اند. مجموعه تهی را مجموعه‌ای تحویل ناپذیر نمی‌پندارند.

نمونه ۱-۶. A^1 تحویل ناپذیر است. زیرا تنها زیرمجموعه‌های سره و بسته آن، مجموعه‌های متناهی هستند و خود A^1 نامتناهی است، زیرا k میدان بسته جبری می‌باشد که نامتناهی است.

پرسش ۱-۷. نشان دهید اگر $U \neq \emptyset$ و V یک فضای تحویل ناپذیر باشد، آنگاه U نیز تحویل ناپذیر است.

پرسش ۱-۸. نشان دهید هر زیرمجموعه باز ناتهی از یک فضای تحویل ناپذیر، تحویل ناپذیر و چگال است.

پرسش ۱-۹. نشان دهید اگر Y یک زیرمجموعه تحویل ناپذیر از X باشد، آنگاه بستار آن یعنی $\bar{Y}$ در X نیز تحویل ناپذیر است.

تعریف ۴. یک چندگونای جبری آفین (یا به طور ساده، چندگونای آفین) یک زیرمجموعه بسته تحویل ناپذیر از $\mathbf{A}^n$ همراه با توپولوژی القایی است. یک زیرمجموعه باز از چندگونای آفین را چندگونای آفین-سا گویند.

بنابراین، چندگوناها ی آفین $\mathbf{A}^1$ ، مجموعه های تک عضوی و خود $\mathbf{A}^1$ می باشند. برای بررسی روابط میان زیرمجموعه های $\mathbf{A}^n$ و ایده آل های $A = k[x_1, \dots, x_n]$ نیازمند تعریف زیر هستیم.

تعریف ۵. برای هر زیرمجموعه $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ ، ایده آل $I(Y)$ در A را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$I(Y) = \{f \in A \mid f(P) = 0, \forall P \in Y\}.$$

فرض کنید $Y = \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$. آشکارا هیچ چندجمله ای ناصفر یک متغیره نمی تواند روی Y صفر شود. پس $I(Y) = (0)$.

اکنون، تابعی مانند Z را در اختیار داریم که زیرمجموعه های A را به مجموعه های جبری و تابعی مانند I داریم که زیرمجموعه های $\mathbf{A}^n$ را به ایده آل های A می نگارد. ویژگی های این دو را در گزاره زیر گرد آورده ایم.

گزاره ۱-۱۰. (ا) اگر $T_1 \subseteq T_2$ زیرمجموعه هایی از A باشند، آنگاه $Z(T_1) \supseteq Z(T_2)$.

(ب) اگر $Y_1 \subseteq Y_2$ زیرمجموعه هایی از $\mathbf{A}^n$ باشند، آنگاه $I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$.

(پ) برای هر دو زیرمجموعه Y_1, Y_2 از $\mathbf{A}^n$ ، داریم:

$$I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2).$$

(ت) برای هر ایده آل $a \subseteq A$ ، داریم:

$$I(Z(a)) \supseteq \sqrt{a}.$$

(ث) برای هر زیرمجموعه $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ ، داریم:

$$Z(I(Y)) = \bar{Y},$$

که در آن $\bar{Y}$ بستار Y نسبت به توپولوژیکی زاریسکی است.

قضیه ۱-۱۱. (قضیه صفرهای هیلبرت) فرض کنید k یک میدان بسته جبری و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه $A = k[x_1, \dots, x_n]$ باشد. اگر $f \in A$ یک چندجمله‌ای باشد که در هر نقطه از $Z(\mathfrak{a})$ صفر شود، آنگاه

(آ) هر ایده‌آل ماکزیمال حلقه A به شکل $\mathfrak{m}_P = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ است که $P = (a_1, \dots, a_n)$ نقطه‌ای در $\mathbf{A}_k^n$ است.
(ب)

$$I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} = \{g \in A \mid g^l \in \mathfrak{a}, \exists l \in \mathbb{Z}\}.$$

(پ)

$$Z(\mathfrak{a}) = \emptyset \text{ اگر و تنها اگر } \mathfrak{a} = k[x_1, \dots, x_n].$$

فرض کنید $Y \subseteq \mathbf{A}_k^n$ ، آنگاه $Z(I(Y)) = \bar{Y}$ که در آن $\bar{Y}$ بستار Y می‌باشد.
بنابر تعریف، $Z(I(Y))$ یک مجموعه بسته است که $Y \subseteq Z(I(Y))$. بنابراین،
 $\bar{Y} \subseteq Z(I(Y))$.

پیامد ۱-۱۲. اگر k یک میدان بسته جبری باشد، یک تناظر یک‌به‌یک نگهدارنده شمول میان مجموعه‌های جبری در $\mathbf{A}_k^n$ و ایده‌آل‌های رادیکال (ایده‌آلهایی مانند $\mathfrak{a}$ که $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$) در $A = k[x_1, \dots, x_n]$ می‌توان یافت که توسط $Y \mapsto I(Y)$ و $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$ نموده می‌شوند. همچنین، این یک تناظر یک‌به‌یک میان ایده‌آل‌های اول و مجموعه‌های جبری تحویل‌ناپذیر هست. در این صورت، ایده‌آل‌های ماکزیمال متناظر نقاط می‌باشند.

پیش‌تر دیده شد که مجموعه‌های جبری آفین در تناظر یک‌به‌یک با ایده‌آل‌های رادیکال هستند، اکنون می‌خواهیم ببینیم چگونه ایده‌آل‌هایی در تناظر با مجموعه‌های جبری تحویل‌ناپذیر خواهند بود.

گزاره ۱-۱۳. هر مجموعه جبری تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر ایده‌آل آن یک ایده‌آل اول باشد.

برهان: فرض کنید $X \subseteq \mathbf{A}_k^n$ یک مجموعه جبری و $I(X)$ ایده‌آل آن باشد. نشان می‌دهیم X تحویل‌پذیر است اگر و تنها اگر $I(X)$ ایده‌آل اول نباشد.

چون X تحویل‌پذیر است، پس $X = X_1 \cup X_2$ که $X_1, X_2 \subsetneq X$ زیرمجموعه‌هایی جبری هستند. آنگاه از اینکه $X_1 \subsetneq X$ می‌توان f_1 را از $I(X_1) \setminus I(X)$ و از اینکه $X_2 \subsetneq X$ می‌توان f_2 را از $I(X_2) \setminus I(X)$ برگزید. چون حاصل ضرب $f_1 f_2$ روی هر نقطه X صفر می‌شوند پس $f_1 f_2 \in I(X)$ که نشان‌دهنده این است که ایده‌آل $I(X)$ اول نیست.

اکنون فرض کنید ایده‌آل $I(X)$ اول نباشد. پس می‌توان f_1, f_2 را چنان برگزید که در $I(X)$ نباشند ولی $f_1 f_2 \in I(X)$. ایده‌آل‌های I_1 و I_2 را به ترتیب ایده‌آل‌های تولید شده به وسیله $(I(X), f_1)$ و $(I(X), f_2)$ می‌گیریم که $Z(I_1) = X_1$ و $Z(I_2) = X_2$. آشکارا دیده می‌شود که $X_1 \subsetneq X$ و $X_2 \subsetneq X$ مجموعه‌های جبری هستند که $X \subseteq X_1 \cup X_2$. زیرا به ازای هر $P \in X$ داریم $f_1 f_2(P) = 0$. پس $f_1(P) = 0$ یا $f_2(P) = 0$ ؛ یعنی $f_1, f_2 \in I(X)$ که با فرض سازگاری ندارد. ■

هشدار ۱-۱۴. فرض کنید میدان k بسته جبری نباشد. ممکن است f چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر باشد در حالی که $Z(f)$ تحویل‌ناپذیر نباشد. به طور نمونه، چندجمله‌ای

$$f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + y^2 = x^4 - 2x^2 + 1 + y^2$$

به دو سازه درجه دوم تحویل‌ناپذیر $(x^2 - 1 - iy)$ و $(x^2 - 1 + iy)$ در $\mathbb{C}[x, y]$ تجزیه می‌شود در حالی که $f(x, y)$ روی $\mathbb{R}[x, y]$ تحویل‌ناپذیر است. از سوی دیگر،

$$Z(f) = \{(1, 0), (-1, 0)\} = Z(x - 1, y) \cup Z(x + 1, y)$$

تحویل‌پذیر است.

نمونه ۱-۱۵. مجموعه $\mathbf{A}_k^n$ تحویل‌ناپذیر است زیرا ایده‌آل آن در حلقه A ایده‌آل صفر است که می‌دانیم ایده‌آلی اول است.

نمونه ۱-۱۶. فرض کنیم f یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر در $A = k[x, y]$ باشد.

در این صورت، f یک ایده‌آل اول در A تولید می‌کند. چون A یک دامنه تجزیه یکتا است، پس مجموعه صفر $Y = Z(f)$ تحویل‌ناپذیر است که آن را خم در صفحه آفین (روی میدان k) با معادله $f(x, y) = 0$ می‌نامند.

$$Z(\{f\}) = Z(f) = \{(a, b) \mid f(a, b) = 0\}.$$

به $\mathbf{A}_k^d$ صفحه آفین می‌گویند و اگر f از درجه d باشد، آنگاه $Y = Z(f)$ را یک خم از درجه d می‌نامند.

به طور کلی، اگر f یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر در $A = k[x_1, \dots, x_n]$ باشد، آنگاه چندگونای آفین $Y = Z(f)$ را به شرطی که $n = 3$ ، یک رویه و اگر $n > 3$ ، آن را یک ابررویه می‌نامند.

چنانچه k یک میدان بسته جبری نباشد، آنچه در قضیه ۱-۱۱ گفته شده ممکن است درست نباشد. در صورتی که $k = \mathbb{R}$ ، مجموعه صفرهای $0 = x^2 + y^2 + 1$ در $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}^2$ برابر مجموعه تهی است.

۱-۱-۱ توابع

پس از بررسی و شناخت برخی چیزهای هندسی مانند مجموعه‌های جبری و چندگونا‌های جبری، برآنیم تا یکی از ابزارهای ارزش در بررسی این چیزها یعنی توابع را بهتر بشناسیم. فرض کنید f در حلقه $k[x_1, \dots, x_n]$ باشد. در این صورت، f یک تابع از $\mathbf{A}_k^n$ به $\mathbf{A}_k^1$ را به صورت

$$f : p = (a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n)$$

تعریف می‌کند. توابع $x_i : \mathbf{A}_k^n \rightarrow k$ که $(a_1, \dots, a_n)$ را به a_i می‌نگارند را توابع مختصات روی $\mathbf{A}_k^n$ می‌نامند.

تعریف ۶. اگر $Y \subseteq \mathbf{A}_k^n$ یک مجموعه جبری آفین باشد، آنگاه حلقه مختصات آفین Y یعنی $A/I(Y)$ را با $A(Y)$ نمایش می‌دهیم که k -زیرجبری از k -جبر همه توابع از Y به k است که توسط توابع مختصات محدود به Y تولید می‌شود.

همریختی $\varphi : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A(Y)$ که x_i را (به عنوان یک تابع) به تحدید x_i به Y و نیز k را به k به عنوان توابع ثابت می نگارد را در نظر بگیرید. در این صورت، φ یک همریختی پوشا از k -جبرها است. همچنین،

$$\begin{aligned} \ker \varphi &= \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid \varphi(f) = 0\} \\ &= \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f \text{ روی } Y \text{ صفر می شود}\} \\ &= I(Y). \end{aligned}$$

گزاره ۱-۱۷. اگر $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ یک مجموعه جبری باشد، آنگاه حلقه مختصات Y با حلقه خارج قسمتی $\frac{k[x_1, \dots, x_n]}{I(Y)}$ یکریخت است.

بنابراین، $A(Y)$ یک k -جبر متناهی مولد و در نتیجه نوتری است. چون $I(Y)$ باید یک ایده آل رادیکال باشد، پس $A(Y)$ هیچ عضو پوچ توانی جز صفر ندارد. اگر Y یک چندگونی آفین باشد، آنگاه $A(Y)$ یک دامنه صحیح است. همچنین، $A(Y)$ یک k -جبر با متناهی مولد است. برعکس، هر k -جبر متناهی مولد B که یک دامنه صحیح است، یک حلقه مختصات از یک چندگونی آفین می باشد. به زبان دیگر، B را می توان به صورت خارج قسمت $A/\mathfrak{a}$ نوشت که $A = k[x_1, \dots, x_n]$ یک حلقه چندجمله ای و $\mathfrak{a}$ ایده آلی از A است. در این حالت، می توان نوشت: $Y = Z(\mathfrak{a})$.

به طور نمونه، برای یافتن حلقه مختصات مخروط

$$C = Z(x^2 + y^2 - z^2)$$

در $\mathbf{A}_k^3$ از قضیه بالا کمک می گیریم. از آنجایی که چندجمله ای $x^2 + y^2 - z^2$ در حلقه $k[x, y, z]$ تحویل ناپذیر است پس ایده آل تولید شده به وسیله آن یک ایده آل اول است. بنابر قضیه صفرهای هیلبرت، ایده آل $I(C)$ به وسیله چندجمله ای $x^2 + y^2 - z^2$ تولید می شود. پس حلقه مختصات مخروط C به صورت

$$\frac{k[x, y, z]}{(x^2 + y^2 - z^2)}$$

خواهد بود.

پرسش ۱-۱۸. آیا توابع مختصات روی $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ توابعی پیوسته هستند؟

اگر Y یک مجموعه ناتهی باشد، آنگاه $\mathcal{F}(Y, k)$ را مجموعه همه توابع از Y به k قرار می‌دهیم. به ازای هر $f, g \in \mathcal{F}(Y, k)$ و با تعریف عملگرهای جمع و ضرب به صورت

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

برای $x \in Y$ ، مجموعه $\mathcal{F}(Y, k)$ یک حلقه خواهد بود. میدان k را می‌توان به زیرحلقه‌ای از $\mathcal{F}(Y, k)$ که دربرگیرنده همه توابع ثابت است در نظر گرفت.

اگر $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ یک چندگونا باشد، آنگاه تابع $f \in \mathcal{F}(Y, k)$ را یک **تابع چندجمله‌ای** نامند هرگاه یک چندجمله‌ای $F \in k[x_1, \dots, x_n]$ یافت شود که برای هر $(a_1, \dots, a_n) \in Y$ داشته باشیم:

$$f(a_1, \dots, a_n) = F(a_1, \dots, a_n).$$

توابع چندجمله‌ای تشکیل یک زیرحلقه از $\mathcal{F}(Y, k)$ را می‌دهند که k زیرمجموعه آن مجموعه است.

دو چندجمله‌ای F و G را برابر گویند اگر و تنها اگر به ازای هر $(a_1, \dots, a_n) \in Y$ داشته باشیم:

$$(G - F)(a_1, \dots, a_n) = 0;$$

یعنی $F - G \in I(V)$. بنابراین، می‌توان حلقه خارج قسمتی $A(Y)$ را با زیرحلقه‌ای از $\mathcal{F}(Y, k)$ که مجموعه همه توابع چندجمله‌ای روی Y است یکی گرفت.

حال می‌خواهیم توپولوژی روی چندگوناها را مورد بررسی قرار دهیم. برای این کار، رده‌ای از فضاها توپولوژیک که دربرگیرنده همه چندگوناها است را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۷. یک فضای توپولوژیک **نوتری** است هرگاه شرط زنجیر کاهشی روی زیرمجموعه‌های بسته آن درست باشد؛ یعنی برای هر زنجیر $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$ از زیرمجموعه‌های بسته، عددی