



دانشگاه سوادکوه

حل عددی معادلات دیفرانسیل

(رشته ریاضی)

دکتر فهیمه سلطانیان

«امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.»^۱

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

۱. پیام مقام معظم رهبری به مناسبت آغاز هفته کتاب ۷۲/۱۰/۴

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «إِقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

پیشگفتار	یازده
فصل اول: مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل	۱
هدف کلی	۱
هدف‌های یادگیری	۱
مقدمه	۱
۱-۱ مسائل مقدار اولیه	۴
۲-۱ روش تکرار پیکارد	۷
۳-۱ معادلات تفاضلی	۸
خلاصه فصل اول	۱۶
خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل اول	۱۶
خودآزمایی تشریحی فصل اول	۱۷
فصل دوم: حل عددی مسائل مقدار اولیه - روش‌های تک‌گامی	۲۱
هدف کلی	۲۱
هدف‌های یادگیری	۲۱
مقدمه	۲۱
۱-۲ ساختار روش‌های تک‌گامی	۲۲
۲-۲ روش سری تیلور	۲۴
۳-۲ روش‌های رانگ - کوتا	۲۹
۴-۲ روش برونیابی	۳۸
۵-۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر و دستگاه معادلات دیفرانسیل	۴۳
خلاصه فصل دوم	۵۷
خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل دوم	۵۸
خودآزمایی تشریحی فصل دوم	۶۰

۶۵	فصل سوم: حل عددی مسائل مقدار اولیه - روش های چندگامی
۶۵	هدف کلی
۶۵	هدف های یادگیری
۶۵	مقدمه
۶۶	۱-۳ ساختار روش های چندگامی
۶۷	۲-۳ روش های چندگامی صریح
۷۶	۳-۳ روش های چندگامی ضمنی
۸۷	خلاصه فصل سوم
۸۷	خودآزمایی چهارگزینه ای فصل سوم
۸۸	خودآزمایی تشریحی فصل سوم
۹۱	فصل چهارم: مسائل مقدار مرزی برای معادلات دیفرانسیل معمولی
۹۱	هدف کلی
۹۱	هدف های یادگیری
۹۱	مقدمه
۹۳	۱-۴ وجود و یکتایی جواب مسائل مقدار مرزی
۹۵	۲-۴ روش پرتابی برای مسائل مقدار مرزی خطی و غیرخطی
۱۰۸	۳-۴ روش تفاضلات متناهی برای مسائل مقدار مرزی خطی و غیرخطی
۱۲۰	خلاصه فصل چهارم
۱۲۱	خودآزمایی چهارگزینه ای فصل چهارم
۱۲۳	خودآزمایی تشریحی فصل چهارم
۱۲۷	فصل پنجم: حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
۱۲۷	هدف کلی
۱۲۷	هدف های یادگیری
۱۲۷	مقدمه
۱۲۸	۱-۵ دسته بندی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
۱۳۱	۲-۵ تقریب تفاضلات متناهی
۱۳۳	۳-۵ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی
۱۵۶	۴-۵ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هذلولوی
۱۶۱	۵-۵ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی
۱۶۷	خلاصه فصل پنجم
۱۶۸	خودآزمایی چهارگزینه ای فصل پنجم
۱۶۹	خودآزمایی تشریحی فصل پنجم
۱۷۵	تمرین های مروری
۲۱۵	پاسخنامه
۲۱۶	منابع

پیشگفتار

مدل ریاضی بیشتر مسائل در علوم و مهندسی به فرم معادلات دیفرانسیل است. ولی این واقعیت وجود دارد که اکثر این معادلات را نمی‌توان با روش‌های تحلیلی حل کرد، بنابراین لازم است از روش‌های تقریبی و عددی برای حل این مسائل استفاده کنیم. روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل اگرچه یکی از مباحث قدیمی در آنالیز عددی است، ولی باتوجه به اهمیت و کاربرد آن همواره موضوع موردتوجه بسیاری از محققین بوده است.

در این کتاب سعی شده مباحث مربوط به حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به صورت کاملاً خودآموز و با زبان ساده، شیوا و قابل فهم برای دانشجویان دوره کارشناسی بیان شود. برای درک بهتر مطالب، پس از تشریح هر روش، چندین مثال مختلف که کاربرد آن روش را نشان می‌دهد، با جزئیات کامل ارائه شده است.

از ویژگی‌های کتاب حاضر این است که تمام مطالب سرفصل مصوب شورای عالی برنامه‌ریزی وزارت علوم، تحقیقات و فناوری برای این درس را پوشش می‌دهد و در قالب ۵ فصل ارائه شده است.

فصل اول یک تصویر کلی از ابزارهای عددی حل معادلات دیفرانسیل و معادلات تفاضلی می‌دهد. در فصل‌های دوم و سوم، به ترتیب حل عددی مسائل مقدار اولیه با روش‌های تک‌گامی و چندگامی موردبررسی قرار گرفته است. روش‌های عددی حل مسائل مقدار مرزی در فصل چهارم و در فصل پنجم، روش‌های تفاضلی برای حل

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از سه نوع سهموی، هذلولوی و بیضوی بیان شده است. در پایان هر فصل نیز تمرین‌های چهارگزینه‌ای و تمرین‌هایی به صورت خودآزمایی برای سنجش آموخته‌های دانشجویان ارائه شده است. در انتها، تعدادی تمرین مروری از مباحث مختلف کتاب به همراه حل آن‌ها از آورده شده است.

فصل اول

مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل

هدف کلی

در این فصل ضمن بیان قضیه وجود و یکتایی جواب مسائل مقدار اولیه، معادلات تفاضلی و چگونگی تعیین جواب آن‌ها مطالعه می‌شود.

هدف‌های یادگیری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. مرتبه، خطی یا غیرخطی بودن معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را مشخص کند.
۲. وجود و یکتایی جواب مسائل مقدار اولیه را بررسی کند.
۳. تقریبی از جواب مسائل مقدار اولیه را با روش تکرار پیکارد تعیین کند.
۴. جواب عمومی معادلات تفاضلی همگن و غیرهمگن را به دست آورد.

مقدمه

هر معادله که شامل یک تابع مجهول و مشتقاتش نسبت به یک یا چندمتغیر مستقل باشد را معادله دیفرانسیل می‌نامند. مدل ریاضی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، شیمیایی، بیولوژیکی، اقتصاد و غیره نظیر تجزیه رادیواکتیو، شار جریان در مدارهای الکتریکی، پراکندگی و کشف امواج زلزله، پردازش تصویر، پیش‌بینی‌های مالی، افزایش یا کاهش

جمعیت و بسیاری مسائل دیگر به صورت معادله دیفرانسیل ظاهر می شود. بنابراین بررسی و حل معادلات دیفرانسیل همواره مورد توجه بوده است. در واقع یکی از کاربردی ترین مباحث موجود در ریاضیات، موضوع معادلات دیفرانسیل است. لازم به ذکر است که حتی ساده ترین معادلات دیفرانسیل، مدل های مفیدی از فرایندهای فیزیکی مهم هستند. مثال زیر می تواند روشن کننده این مطلب باشد.

طبق قانون دوم نیوتن نیروی کل وارد بر جسمی به جرم m و شتاب a برابر است با

$$F = ma \quad (1-1)$$

حال فرض کنید جسمی به جرم m تنها تحت تأثیر شتاب ثقل زمین آزادانه سقوط کند، در این حالت تنها نیروی وارد بر آن mg است که در آن g شتاب ثقل زمین است. هرگاه y فاصله جسم از ارتفاع ثابتی باشد، آنگاه شتاب جسم $\frac{d^2y}{dx^2}$ است و رابطه (1-1) به صورت زیر درمی آید:

$$m \frac{d^2y}{dx^2} = mg \quad (2-1)$$

اگر باین فرض که هوا نیز نیروی مقاومی متناسب با سرعت جسم بر آن اعمال می کند، وضعیت را تغییر دهیم، نیروی کل وارد بر جسم

$$F = mg - k \frac{dy}{dx}$$

است که در آن k ضریب مقاومت نام دارد. در این صورت رابطه (1-1) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$m \frac{d^2y}{dx^2} = mg - k \frac{dy}{dx} \quad (3-1)$$

معادله (3-1) مدل ریاضی این مسئله فیزیکی است که به صورت یک معادله دیفرانسیل ظاهر شده است.

در صورتی که مشتق تابع مجهول نسبت به یک متغیر در معادله ظاهر شده باشد، معادله را معادله دیفرانسیل معمولی، در غیر این صورت معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می نامیم. معادله های زیر نمونه هایی از معادلات دیفرانسیل معمولی هستند:

$$\frac{dy}{dx} = -kx$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + p(p+1)y = 0$$

$$y'''(x) + e^{y(x)} = e^x$$

معادلات زیر نیز نمونه‌هایی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

که در آن α^2 و β^2 ثابت‌های فیزیکی هستند. این دو معادله به ترتیب معادله گرما و معادله موج نامیده می‌شوند و مطالعه آن‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است. در فصل پنجم روش‌های عددی حل این معادلات را بیان خواهیم کرد.

نکته: در ادامه مباحث منظور از معادله دیفرانسیل، معادله دیفرانسیل معمولی است. بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله، مرتبه معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود و درجه بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله، درجه معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود. یک رده‌بندی مهم از معادلات دیفرانسیل، خطی یا غیرخطی بودن آن‌ها است. اگر در معادله دیفرانسیل هیچ ضربی بین متغیر وابسته y با خودش یا مشتقاتش وجود نداشته باشد، معادله را خطی در غیر این صورت غیرخطی می‌نامیم. همچنین در یک معادله دیفرانسیل اگر همه عبارت‌های غیرصفر شامل متغیر وابسته باشند، معادله دیفرانسیل را همگن در غیر این صورت غیرهمگن می‌نامیم. از طرفی اگر همه ضرایب معادله دیفرانسیل ثابت باشند، معادله را یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت در غیر این صورت با ضرایب متغیر می‌نامیم. فرم کلی یک معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه m به صورت،

$$F(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}, y^{(m)}) = 0 \quad (1-5)$$

یا

$$y^{(m)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \quad (1-5)$$

است. معادله (1-5) نمایش استاندارد معادله (1-5) نامیده می‌شود که در آن بالاترین مرتبه مشتق برحسب مشتقات مراتب پایین‌تر و متغیر مستقل x بیان می‌شود. جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه m ، شامل m ثابت دلخواه مستقل است. برای تعیین این m مقدار

ثابت، m شرط در یک نقطه لازم است. اگر این m شرط، مقدار تابع جواب و مشتقات آن در یک نقطه مشخص باشند، به آن‌ها شرایط اولیه گفته می‌شود. یک معادله دیفرانسیل به همراه شرایط اولیه، یک مسئله مقدار اولیه نامیده می‌شود. بنابراین یک مسئله مقدار اولیه مرتبه m به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} y^{(m)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}), & x_0 \leq x \leq b \\ y^{(p)}(x_0) = y_0^{(p)}, & p = 0, 1, 2, \dots, m-1 \end{cases} \quad (6-1)$$

اگر این m شرط مقادیر تابع جواب، مشتقات و یا ترکیب آن‌ها را در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه جواب نشان دهند، شرایط مرزی نامیده می‌شوند. هر معادله دیفرانسیل به همراه شرایط مرزی، مسئله مقدار مرزی نامیده می‌شود.

اگر بخواهیم یک تقسیم‌بندی برای مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی داشته باشیم، می‌توان گفت مسائل مقدار اولیه معمولاً در مدل‌بندی پدیده‌های وابسته به زمان و مسائل مقدار مرزی در مدل‌بندی سیستم‌های پایدار حالت ظاهر می‌شوند. به عنوان مثال معادله دیفرانسیل

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = e^x, \quad 0 \leq x \leq 3$$

با شرایط اولیه

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0$$

یک مسئله مقدار اولیه مرتبه ۳ است.

همچنین معادله دیفرانسیل

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2$$

با شرایط مرزی

$$y(1) = 1, \quad y(2) = 2$$

یک نمونه از مسائل مقدار مرزی است.

۱-۱ مسائل مقدار اولیه

در فصل دو خواهیم دید که هر مسئله مقدار اولیه مرتبه m به فرم (۶-۱)، با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول مقدار اولیه معادل است. بنابراین بررسی روش‌های عددی

حل مسئله مقدار اولیه،

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x_0 \leq x \leq b \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (7-1)$$

از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. حال اولین سوالی که پیش می‌آید این است که آیا الزاماً جوابی برای این مسئله وجود دارد؟ یا تابع $f(x, y)$ چه شرایطی باید داشته باشد تا وجود جوابی یکتا تضمین شود؟ مثال زیر نشان می‌دهد که مسئله (7-1) در حالت کلی ممکن است جوابی نداشته باشد.

۱-۱-۱ مثال

مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} y' = y^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. جواب این معادله عبارت است از:

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

این جواب به ازای $x = 1$ تعریف شده نیست، بنابراین این مسئله مقدار اولیه روی بازه $[0, 2]$ جواب ندارد.

از این مثال مشخص می‌شود که پیوستگی تابع $f(x, y)$ برای تضمین وجود جوابی یکتا برای مسئله مقدار اولیه (7-1) کافی نیست.

۱-۱-۲ تعریف

فرض کنید. $D = \{(x, y) \mid x_0 \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$. هرگاه ثابت $L > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $(x, y), (x, z) \in D$ داشته باشیم:

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L |y - z|$$

گوییم تابع $f(x, y)$ روی D در شرط لیپ شیتس نسبت به متغیر y صدق می‌کند و L را ثابت لیپ شیتس می‌نامیم.

۱-۱-۳ مثال

تابع $f(x, y) = x|y|$ روی $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 4\}$ در شرط لیپ شیتس نسبت به متغیر y صدق می‌کند. زیرا برای هر $(x, y), (x, z) \in D$ داریم:

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |x|y| - x|z|| = |x| ||y| - |z|| \leq 2|y - z|$$

و ثابت لیپ شیتس ۲ است.

۱-۱-۴ قضیه

فرض کنید $D = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ و شرایط زیر برای تابع $f(x, y)$ برقرار باشد:

(الف) $f(x, y)$ روی D تعریف شده و پیوسته باشد،

(ب) $f(x, y)$ روی D در شرط لیپ شیتس نسبت به متغیر y صدق کند،

آنگاه برای هر مقدار اولیه y_1 ، مسئله مقدار اولیه (۷-۱) دارای جواب منحصر به فرد $y(x)$ برای $x_1 \leq x \leq b$ می‌باشد که $y(x)$ برای هر $(x, y) \in D$ پیوسته و مشتق پذیر است. اثبات این قضیه در [بوچر، ۲۰۰۸: ۲۳] آورده شده است.

۱-۱-۵ مثال

نشان دهید مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} y' = 1 + x \sin(xy), & 0 \leq x \leq 2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (۸-۱)$$

دارای جواب یکتا است.

حل: x را ثابت در نظر گرفته و قضیه مقدار میانی را برای تابع

$$f(x, y) = 1 + x \sin(xy)$$

به کار می‌گیریم. بنابراین هرگاه $z < y$ باشد، عدد $\xi \in (z, y)$ وجود دارد به طوری که:

$$\frac{f(x, y) - f(x, z)}{y - z} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, \xi) = x^\gamma \cos(x\xi)$$

در نتیجه برای $0 \leq x \leq 2$ داریم:

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |y - z| |x^\gamma \cos(x\xi)| \leq 4|y - z|$$

پس f در شرط لیب شیتس نسبت به متغیر y با ثابت $L = \varepsilon$ صدق می‌کند. علاوه بر آن $f(x, y)$ روی $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, -\infty < y < \infty\}$ پیوسته است. پس طبق قضیه ۱-۱-۸، مسئله مقدار اولیه (۱-۸) دارای جواب یکتا است.

۲-۱ روش تکرار پیکارد

فرض کنید $y(x)$ جوابی از مسئله مقدار اولیه (۱-۷) باشد. با انتگرال‌گیری از معادله $y' = f(x, y)$ داریم:

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

با محاسبه انتگرال طرف چپ، نتیجه می‌شود:

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

به‌طور معادل،

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (9-1)$$

معادله (۹-۱) یک معادله انتگرال است. در عمل چون $y(x)$ مشخص نیست، آن را به‌وسیله دنباله توابع $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ تقریب می‌زنیم که به‌صورت بازگشتی

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \quad (10-1)$$

تعریف می‌شوند. این روش برای آن دسته از توابع f که بتوان انتگرال‌گیری (۱۰-۱) را برای آن‌ها به‌طور صریح انجام داد، عملی است. در واقع دنباله $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ تولیدشده از این روش به تابع جواب همگرا است.

۱-۲-۱ مثال

با استفاده از روش تکرار پیکارد جواب تقریبی مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} y' = y, & 0 \leq x \leq 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

را بیابید.

حل: با انتخاب $y_0(x) = 1$ ، از رابطه بازگشتی $(1) - (1)$ به دست می آوریم:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x y_0(t) dt = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x y_1(t) dt = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x y_2(t) dt = 1 + \int_0^x \left(1+t+\frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} y_n(x) &= 1 + \int_0^x y_{n-1}(t) dt \\ &= 1 + \int_0^x \left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\dots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right) dt \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

از طرفی چون

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

پس جواب دقیق مسئله عبارت است از:

$$y(x) = e^x$$

۳-۱ معادلات تفاضلی

اساس اکثر روش های عددی برای حل مسئله مقدار اولیه $(1) - (7)$ یک روند گام به گام است. این روش ها در واقع الگوریتم هایی هستند که جدولی از مقادیر $y(x)$ را در نقاط معین و متساوی الفاصله $x_0, x_1, x_2, \dots$ که نقاط گره یا شبکه نامیده می شوند، تولید می کنند. این مقادیر به وسیله یک رابطه بازگشتی محاسبه می شوند که از مسئله $(1) - (7)$ به دست می آید و y_n را بر حسب $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ بیان می کند. رابطه بین نقاط شبکه به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ x_N &= b \end{aligned} \quad (11-1)$$

که در آن $h > 0$ ، طول گام نامیده می شود. به بیان دیگر

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (12-1)$$

ساده‌ترین رابطه بازگشتی مناسب برای حل معادله دیفرانسیل (۷-۱)، با قراردادن یک تفاضل پیشرو به جای y'_n به دست می‌آید. اگر قرار دهیم:

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

از (۷-۱) داریم:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$$

به‌طور معادل،

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (۱۳-۱)$$

معادله (۱۳-۱) یک معادله تفاضلی نامیده می‌شود. به بیان دیگر با جای‌گذاری تقریب‌های تفاضلی به جای مشتقات در یک معادله دیفرانسیل، معادله تفاضلی به دست می‌آید. نظریه و حل معادلات تفاضلی در بسیاری از جنبه‌ها به موازات نظریه و حل معادلات دیفرانسیل است.

برای بررسی دقت تقریب‌های حاصل از روش‌هایی نظیر (۱۳-۱) برای حل معادلات دیفرانسیل، به معرفی ساختار و خواص معادلات تفاضلی می‌پردازیم.

۱-۳-۱ تعریف

فرض کنید $\{F_n(w, w_1, \dots, w_m)\}$ دنباله‌ای از توابع $m+1$ متغیره باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر w_r متعلق به بازه بسته I که $r = 0, 1, \dots, m$ تعریف شده باشد. معادله

$$F_n(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m}) = 0 \quad (۱۴-۱)$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ یک معادله تفاضلی مرتبه m نامیده می‌شود.

دنباله‌ای مانند $\{y_n\}$ جواب معادله تفاضلی (۱۴-۱) نامیده می‌شود، هرگاه به ازای

هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $y_n \in I$ و y_n در (۱۴-۱) صدق کند.

فرم کلی یک معادله تفاضلی غیرهمگن خطی مرتبه m با ضرایب ثابت به صورت

$$a_m y_{n+m} + a_1 y_{n+m-1} + \dots + a_m y_n = g_n \quad (۱۵-۱)$$

است، که در آن a_j ها، $j = 0, 1, 2, \dots, m$ اعداد ثابت مستقل از n ، $a_m \neq 0$ و $a_0 \neq 0$ هستند. با جای‌گذاری $g_n = 0$ در معادله (۱۵-۱)، معادله تفاضلی همگن

$$a_m y_{n+m} + a_1 y_{n+m-1} + \dots + a_m y_n = 0 \quad (۱۶-۱)$$

به دست می آید. اگر $y_n^{(p)}$ یک جواب خصوصی از معادله (۱-۱۵) و φ_n جواب عمومی معادله همگن نظیر آن یعنی معادله (۱-۱۶) باشد، آن گاه هر جواب عمومی y_n از معادله غیرهمگن (۱-۱۵) به صورت

$$y_n = y_n^{(p)} + \varphi_n \quad (17-1)$$

خواهد بود.

برای توضیح روش حل معادلات تفاضلی، ابتدا معادله تفاضلی همگن مرتبه دوم

$$a_2 y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0 \quad (18-1)$$

را در نظر بگیرید. برای حل این معادله قرار می دهیم:

$$y_n = z^n \quad (19-1)$$

که در آن z مستقل از n است. با جای گذاری (۱۹-۱) در (۱۸-۱) داریم:

$$a_2 z^{n+2} + a_1 z^{n+1} + a_0 z^n = 0.$$

به طور معادل،

$$z^n (a_2 z^2 + a_1 z + a_0) = 0 \quad (20-1)$$

اگر $z^n = 0$ باشد، جواب بدیهی $\varphi_n = 0$ به دست می آید. جواب های غیربدیهی برای معادله (۱۸-۱) در صورتی وجود دارند که z ریشه چندجمله ای

$$P_2(z) \equiv a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad (21-1)$$

باشد. معادله (۲۱-۱) معادله مشخصه نظیر معادله تفاضلی (۱۸-۱) نامیده می شود. دو حالت برای ریشه های معادله (۲۱-۱) وجود دارد.

حالت اول: ریشه های معادله مشخصه متمایز باشند.

اگر z_1 و z_2 دو ریشه متمایز معادله (۲۱-۱) باشند، آنگاه دو جواب مستقل خطی

z_1^n و z_2^n داریم. بنابراین جواب عمومی معادله تفاضلی (۱۸-۱) به صورت

$$\varphi_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n \quad (22-1)$$

است که در آن c_1 و c_2 ثابت های دلخواهی هستند.

حالت دوم: ریشه های معادله مشخصه برابر باشند.

اگر $z_1 = z_2 = -\frac{a_1}{2a_2}$ ریشه مضاعف معادله (۲۱-۱) باشد، آنگاه z_1^n یک جواب

معادله (۱۸-۱) است. چون z_1 ریشه تکراری $P_2(z)$ است پس $P_2'(z_1) = 0$. با جای گذاری

$y_n = nz_1^n$ در معادله (۱۸-۱) داریم:

$$\begin{aligned} & a_1(n+2)z_1^{n+2} + a_1(n+1)z_1^{n+1} + a_2nz_1^n \\ &= z_1^n \left[n(a_1z_1^2 + a_2z_1 + a_3) + z_1(2a_1z_1 + a_2) \right] \\ &= z_1^n [nP_2(z_1) + z_1P_2'(z_1)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد nz_1^n جواب دیگر معادله (۱۸-۱) است و جواب عمومی آن به صورت

$$\varphi_n = c_1z_1^n + c_2nz_1^n \quad (23-1)$$
خواهد بود.

۱-۳-۲ مثال

جواب عمومی معادله تفاضلی

$$2y_n + y_{n+1} - y_{n+2} = 0$$

را بیابید.

حل: معادله مشخصه نظیر این معادله تفاضلی عبارت است از:

$$-z^2 + z + 2 = 0$$

که ریشه‌های آن $z_1 = -1$ و $z_2 = 2$ هستند. بنابراین جواب عمومی این معادله

$$\varphi_n = c_1(-1)^n + c_22^n$$

است.

۱-۳-۳ مثال

جواب عمومی معادله تفاضلی

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$$

زیر را بیابید.

حل: معادله مشخصه نظیر این معادله تفاضلی عبارت است از:

$$z^2 - 2z + 1 = 0$$

و ریشه‌های آن $z_1 = z_2 = 1$ هستند. پس جواب عمومی معادله تفاضلی داده شده به صورت زیر است:

$$\varphi_n = c_1 + nc_2$$

روشی که برای تعیین جواب معادلات تفاضلی خطی همگن مرتبه دوم توضیح داده شد را می توان برای معادلات تفاضلی مرتبه m تعمیم داد. دراین حالت نیز با جای گذاری $y_n = z^n$ در معادله (۱۶-۱) داریم:

$$a_1 z^{n+m} + a_1 z^{n+m-1} + \dots + a_m z^n = 0$$

یا

$$z^n (a_1 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m) = 0$$

بنابراین اگر z ریشه چندجمله ای

$$P_m(z) \equiv a_1 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m = 0 \quad (24-1)$$

باشد، جواب های غیربدیهی معادله (۱۶-۱) به دست می آیند. معادله (۲۴-۱) نیز معادله مشخصه نظیر معادله تفاضلی (۱۶-۱) نامیده می شود. درحالت کلی معادله مشخصه (۲۴-۱) دارای m ریشه $z_1, z_2, \dots, z_m$ است. اگر این ریشه ها متمایز باشند، جواب عمومی معادله تفاضلی (۱۶-۱) عبارت است از:

$$\varphi_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \dots + c_m z_m^n \quad (25-1)$$

که در آن $c_1, c_2, \dots, c_m$ اعداد ثابت دلخواهی هستند.

حال فرض کنید معادله مشخصه (۲۴-۱) دارای ریشه تکراری $z_1 = z_2 = \dots = z_r$ باشد و دیگر ریشه های z_i که $i = 3, 4, \dots, m$ متمایز باشند. دراین صورت معادله تفاضلی (۱۶-۱) دارای $m-1$ جواب $z_1^n, z_2^n, \dots, z_m^n$ است. چون z_1 ریشه تکراری چندجمله ای $P_m(z)$ است، پس $P'_m(z_1) = 0$ و با جای گذاری $y_n = n z_1^n$ در معادله (۱۶-۱) داریم:

$$\begin{aligned} & a_1(n+m)z_1^{n+m} + a_1(n+m-1)z_1^{n+m-1} + \dots + a_{m-1}(n+1)z_1^{n+1} + a_m n z_1^n \\ &= z_1^n \left[n(a_1 z_1^m + a_1 z_1^{m-1} + \dots + a_{m-1} z_1 + a_m) \right. \\ & \quad \left. + z_1(m a_1 z_1^{m-1} + (m-1)a_1 z_1^{m-2} + \dots + a_{m-1}) \right] \\ &= z_1^n [n P_m(z_1) + z_1 P'_m(z_1)] = 0 \end{aligned}$$

که نشان می دهد $n z_1^n$ نیز ریشه معادله (۱۶-۱) است. بنابراین جواب عمومی معادله تفاضلی (۱۶-۱) عبارت است از:

$$\varphi_n = c_1 z_1^n + c_2 n z_1^n + c_3 z_3^n + \dots + c_m z_m^n \quad (26-1)$$

در حالت کلی فرض کنید z_1 ریشه تکراری معادله مشخصه (۱-۲۴) با مرتبه تکرار r باشد، یعنی

$$z_1 = z_2 = \dots = z_r$$

و ریشه‌های $z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_m$ متمایز باشند، آنگاه جواب عمومی معادله تفاضلی (۱-۱۶) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \varphi_n = & c_1 z_1^n + c_2 n z_1^n + c_3 n(n-1) z_1^n + \dots \\ & + c_r n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) z_1^n + c_{r+1} z_{r+1}^n + \dots + c_m z_m^n \end{aligned} \quad (1-27)$$

m ثابت دلخواه $c_1, c_2, \dots, c_m$ را می‌توان به گونه‌ای تعیین کرد که برای هر φ_n مقادیر مشخص شده $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$ را اختیار کند.

۱-۳-۴ مثال

جواب عمومی معادله تفاضلی مرتبه سوم

$$y_{n+3} - y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = 0$$

با شرایط اولیه

$$y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 3$$

را بیابید.

حل: معادله مشخصه نظیر معادله تفاضلی داده شده به صورت زیر است:

$$P(z) \equiv z^3 - z^2 - z + 1 = (z-1)^2(z+1) = 0$$

که ریشه‌های آن $z_1 = -1$ و $z_2 = z_3 = 1$ هستند، بنابراین جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$\varphi_n = c_1 (-1)^n + c_2 + n c_3 \quad (1-28)$$

با جای گذاری $n = 0, 1, 2$ در (۱-۲۸) و با استفاده از شرایط اولیه داده شده داریم:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ -c_1 + c_2 + c_3 &= 2 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 &= 3 \end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$c_1 = 0, c_2 = c_3 = 1$$

با جای گذاری این مقادیر در (۱-۲۸)، جواب مطلوب

$$\varphi_n = 1 + n$$

به دست می آید.

برای تعیین جواب عمومی معادله تفاضلی غیرهمگن (۱-۱۵) لازم است یک جواب خصوصی از آن را داشته باشیم. معمولاً جواب خصوصی معادله را با امتحان کردن می توان به دست آورد ولی در حالت خاصی که قسمت غیرهمگن معادله یعنی تابع g مستقل از n و

$$\sum_{j=0}^m a_j \neq 0 \text{ باشد، جواب خصوصی را می توان از رابطه زیر تعیین کرد:}$$

$$y_n^{(p)} = \frac{g}{\sum_{j=0}^m a_j} \quad (1-29)$$

که در این حالت جواب عمومی معادله (۱-۱۵) عبارت است از:

$$y_n = \varphi_n + \frac{g}{\sum_{j=0}^m a_j} \quad (1-30)$$

۱-۳-۵ مثال

جواب عمومی معادله تفاضلی غیرهمگن زیر را بیابید.

$$-y_{n+2} + y_{n+1} + 2y_n = 1 \quad (1-31)$$

حل: معادله همگن نظیر معادله (۱-۳۱) عبارت است از:

$$-y_{n+2} + y_{n+1} + 2y_n = 0 \quad (1-32)$$

و معادله مشخصه نظیر آن

$$-z^2 + z + 2 = 0$$

است. این معادله دارای دو ریشه متمایز $z_1 = -1$ و $z_2 = 2$ بوده، پس جواب عمومی معادله همگن (۱-۳۲) به صورت زیر تعیین می شود:

$$\varphi_n = c_1(-1)^n + c_2 2^n$$

چون قسمت غیرهمگن معادله (۱-۳۱) مستقل از n است، از رابطه (۱-۲۹) جواب خصوصی معادله (۱-۳۱) عبارت است از: