



آنالیز ریاضی ۳

(رشته ریاضی)

دکتر غلامعلی میرزاکریمی دکتر فریبا ارشاد
دکتر محمد چایچی رقیمی

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک‌درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک‌درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی

فهرست

هفت

پیشگفتار مؤلفین

فصل اول - توابع برداری چندمتغیره و مشتق آن

هدف‌های آموزشی

۱

مقدمه

۱

۱-۱ مروری بر بعضی از خواص جبر خطی

۲

۱-۲ مشتق‌گیری

۱۴

۱-۳ خواص مشتق

۲۸

۱-۴ قضایای تابع وارون - تابع ضمنی و رتبه

۳۷

۱-۵ مشتق مراتب بالاتر

۵۴

فصل دوم - انتگرال‌گیری

هدف‌های آموزشی

۶۵

مقدمه

۶۵

۲-۱ انتگرال‌گیری بر بازه های $\mathbb{R}^n$

۶۶

۲-۲ زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^n$ با اندازه صفر

۷۱

۷۸	۲-۳ انتگرال مکرر
۸۳	۲-۴ نگاشت‌های اولیه و افرازهای واحد
	فصل سوم - انتگرال روی فرمها و زنجیرها
۹۵	هدف‌های آموزشی
۹۶	مقدمه
۹۷	۳-۱ جبر خارجی
۱۰۵	۳-۲ فرمهای دیفرانسیل
۱۱۹	۳-۳ مشتق خارجی
۱۳۱	۳-۴ انتگرال روی سادک‌ها و زنجیرها
۱۴۷	۳-۵ قضیه استوکس و لم پوانکاره
۱۶۷	ضمیمه ۱ - مثلث‌بندی به کمک سادک‌ها
۱۷۳	ضمیمه ۲ - آنالیز برداری
۱۸۷	ضمیمه ۳ - انتگرال روی خمینه‌ها
۲۰۹	منابع
۲۱۱	واژه‌نامه فارسی - انگلیسی
۲۱۵	واژه‌نامه انگلیسی - فارسی

پیشگفتار مؤلفان

متن حاضر تداوم متون آنالیز ریاضی ۱ و ۲ دانشگاه پیام نور می باشد که سایر همکاران تدوین آن را به عهده گرفته اند. مفاهیم مشتق و انتگرال در فضای حقیقی به تفصیل در دروس آنالیز ریاضی ۱ و ۲ بیان شده است. در فصل اول این درس نامه مفهوم مشتق به توابع چندمتغیره برداری تعمیم داده شده است. در این فصل به طور محسوسی از ابزارهای جبر خطی به ویژه در قضیه رتبه استفاده شده است. اثبات قضیه تابع معکوس به کمک قضیه نقطه ثابت، روان تر بیان شده است.

فصل دوم با تعمیم انتگرال های حقیقی یک متغیره بر توابع چندمتغیره حقیقی شروع می شود. اندازه صفر و قدر صفر به عنوان ملاکی برای انتگرال پذیری بررسی شده است، سپس انتگرال مکرر و قضیه فوینینی بیان شده و قضیه تغییر متغیر در انتگرال ها به کمک قضیه افراز واحد بیان شده است.

فصل سوم تعمیم مفاهیم فصل اول و دوم در خصوص مشتق و انتگرال می باشد. در این فصل تانسورها و خصوصاً k - فرمها به عنوان تانسورهای همگرد جایگزین توابع برداری چندمتغیره و سادک ها و زنجیرها جایگزین حجه های

k - بعدی شده‌اند و سپس با این عناصر جدید، مشتق و انتگرال معرفی شده است. لم پوانکاره و قضیه استوکس به نوعی جایگزین قضیه تغییر متغیر در انتگرال است که در فصل دوم بیان شده بود. ضمائم فصل سوم به عنوان مطالب اختیاری برای دانشجویان معرفی شده است که پیش درآمدی است برای هندسه منیفلد در دوره کارشناسی ارشد. بر اساس روند جاری در دانشگاه پیام‌نور این کتاب در آتیه نزدیک بازنویسی خواهد گردید. لذا از مدرسین و دانشجویانی که نقایص این متن را یادآوری خواهند کرد سپاس گزاریم. ویرایش علمی این درس‌نامه به عهده آقای دکتر میرمحمد میررضائی بود که در این راستا رهنمودهای فراوانی داشته‌اند، تایپ دقیق دستنویس‌ها به عهده آقای سعید شیبیا بود، همکاران تدوین، خصوصاً مهندس اکبری توصیه‌های مفیدی داشتند، از همگی سپاس گزاریم.

غلامعلی میرزا کریمی دانشگاه پیام نور اصفهان (مؤلف فصل اول)

فریبا ارشاد دانشگاه پیام نور شیراز (مؤلف فصل دوم)

محمد چایچی رقیمی دانشگاه پیام نور تبریز (مؤلف فصل سوم)

مؤلفان

دی ماه ۱۳۸۷

فصل اول

توابع برداری چندمتغیره و مشتق آنها

هدفهای آموزشی

پس از مطالعه این فصل باید مطالب و مفاهیم و تعاریف زیر را به خوبی فرا گرفته باشید.

۱- مفهوم مشتق توابع چندمتغیره برداری و بررسی و مقایسه آن در حالت‌های خاص

۲- شرط لازم و کافی جهت وجود مشتق

۳- محاسبه مشتق و ارتباط آن با مشتقات جزئی

۴- خواص مشتق، به ویژه قاعده زنجیره‌ای و مشتق توابع چندمتغیره و مثال‌های مربوطه

۵- خواص موضعی توابع از کلاس C^1 و ارتباط آن با خواص مشتق تابع

۶- قضایای تابع وارون - تابع ضمنی و رتبه و کاربرد آنها

۷- مشتق مراتب بالاتر و شرایط تعویض ترتیب مشتق‌گیری

مقدمه

در آنالیز ریاضی ۱ مشتق توابع یک متغیره حقیقی یعنی تابع $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مورد مطالعه و خواص آن بررسی شد. همچنین برای توابع برداری یعنی تابع $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ که دارای m مؤلفه حقیقی یک $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$

متغیره هستند وجود مشتق به صورت شرط لازم و کافی وجود مشتقات مؤلفه‌های f مشخص گردید. در ریاضی عمومی ۳ مواجه با توابع n متغیره حقیقی بوده‌ایم که مشتقات جزئی برای آن‌ها مطرح شد لیکن اسمی از مشتق تابع به میان نیامد زیرا امکانات و ملزومات جهت تعریف مشتق فراهم نبود در این فصل نخست مقدمات لازم از جبر خطی و بعضاً از آنالیز تابعی مورد نیاز برای تعریف مشتق توابع از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ ارائه می‌گردد و مشتق و خواص مشتق و عمیق‌ترین قضایا در این زمینه از قبیل تابع وارون و تابع ضمنی و قضیه رتبه و بعضی کاربردهای آن‌ها معرفی می‌شود.

۱-۱ مروری بر بعضی از خواص جبر خطی

فرض کنید V و W دو فضای برداری روی $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ باشند. تابع $T: V \rightarrow W$ به طوری که خاصیت $T(cx + y) = cT(x) + T(y)$ را برای هر x, y در V و هر اسکالر c دارا باشد تبدیل خطی یا تابع خطی از V به W است. تبدیل خطی T از V به W را اغلب عملگر خطی نامند.

هسته T یعنی $\ker T = \{x \in V : T(x) = 0\}$ و برد T یعنی $\text{ran } T = \{T(x) : x \in V\}$ به ترتیب زیر فضاهایی از V و W می‌باشند. خاصیت خطی T چنین نتیجه می‌دهد که تبدیل T یک به یک است اگر و تنها اگر $\ker T = \{0\}$.

بعد هسته T ($\dim \ker T$) را پوچی T و بعد برد T ($\dim \text{ran } T$) را رتبه T نامند. یکی از قضایای مهم جبر خطی در رابطه با رتبه و هسته تبدیل T به صورت زیر است.

۱-۱-۱ قضیه. هرگاه V و W دو فضای برداری و $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی و V دارای بعد متناهی باشد آنگاه

$$\text{رتبه } T + \text{پوچی } T = \dim V$$

فرض کنید V فضای برداری باشد هر زیر مجموعه مستقل خطی از V که فضای V را تولید کند پایه نام دارد یا معادلاً هر زیر مجموعه مستقل و ماکزیمال از V یک پایه برای V است. تعداد بردارهای پایه V را بعد $(\dim V)$ نامند. هرگاه $\dim V < \infty$ آنگاه فضای V با بعد متناهی و در غیر این صورت V با بعد نامتناهی است. هر زیر مجموعه مستقل از V را می توان به عنوان جزئی از یک پایه در نظر گرفت یعنی هرگاه $A \subseteq V$ مستقل باشد آنگاه پایه B برای V موجود است به طوری که $A \subseteq B$.

نتیجه جالبی از قضیه فوق به صورت زیر است :

۱-۱-۲ نتیجه. هرگاه V و W دو فضای برداری متناهی البعد با بعدهای برابر و T تبدیل خطی از V به W باشد آنگاه T یک به یک است اگر و تنها اگر T پوشا باشد و در نتیجه اگر و تنها اگر T وارون پذیر باشد یعنی تحت چنین شرایطی یک به یک بودن معادل پوشا بودن است. به ویژه عملگر T روی فضای با بعد متناهی V یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد.

۱-۱-۳ نمایش تبدیلات خطی

فرض کنید V و W دو فضا با بعد متناهی به ترتیب با پایه های $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ و $B' = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ تبدیل از V به W باشد. در آن صورت تبدیل T نمایشی به فرم یک ماتریس $m \times n$ ، A خواهد داشت، که به آن نمایش ماتریسی تبدیل خطی نسبت به پایه های B و B' گویند. در حقیقت ستون j ام این ماتریس مختصات بردار $T\alpha_j$ در پایه B' می باشد. گرچه این نمایش ماتریسی نسبت به پایه های متفاوت برای V و W ظاهراً ثابت نیست ولی همه خصوصیات تبدیل T را به طور غیر منتظره در خود حفظ می کند که مختصراً به شرح زیر است.

هرگاه V و W فضاهای برداری با بعد متناهی به ترتیب n و m و ماتریس $A, m \times n$ نمایش تبدیل خطی T از V به W نسبت به دو پایه دلخواه باشند آنگاه رتبه T برابر با رتبه ماتریس A است لذا

$$\text{رتبه } A - \text{تعداد ستونهای } A = \text{پوچی } T$$

(رتبه ماتریس برابر با ماکزیمم تعداد ستونهای مستقل خطی است)

۴-۱-۱ فضاهای نرم‌دار

هرگاه نرم روی فضای برداری V تعریف شده باشد V را همراه با نرم تعریف شده فضای نرم‌دار می‌نامند و با نماد $(V, \|\cdot\|)$ نشان می‌دهند. برای تبدیلات خطی روی فضاهای برداری نرم‌دار مفهوم پیوستگی مطرح است که با توجه به خاصیت خطی تبدیلات، پیوستگی در یک نقطه معادل پیوستگی سرتاسری است و به صورت قضیه زیر مطرح می‌شود.

۴-۱-۱-۵ قضیه. فرض کنید $(V, \|\cdot\|) \rightarrow (W, \|\cdot\|_p) : T$ تبدیل خطی باشد در آن صورت f در صفر پیوسته است اگر و تنها اگر f در هر نقطه از V پیوسته باشد. اثبات قضیه با توجه به رابطه $\|T(x) - T(y)\|_p = \|T(x - y)\|_p$ و انتخاب متغیر $u = x - y$ واضح است.

سؤالی جالب در زمینه فضاهای نرم‌دار به این گونه است که آیا نرم‌های متفاوت روی یک فضای برداری، توپولوژی‌های یکسانی ایجاد می‌کند (جواب سؤال در مورد فضای نرم‌دار با بعد نامتناهی مثبت است) اهمیت این سؤال در این است که اغلب بررسی حد و پیوستگی یا مشتق‌پذیری یک تابع از یک فضای نرم‌دار به فضای نرم‌دار دیگر با نرم‌های خاص به سهولت شکل می‌گیرد. لذا هرگاه بعد فضاها متناهی باشد می‌توان گفت این حد یا پیوستگی یا یکنواختی یا مشتق‌پذیری نسبت به هر نرمی برقرار است.

۶-۱-۱ مثال. $\mathbb{R}^n$ را با $\|\cdot\|_\infty$ در نظر گرفته، منظور از $\|\cdot\|_\infty$ یعنی همان

سوپرنرم $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. آیا تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

و

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \frac{x^2 \sin y}{x^2 + y^2}, \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در $(0, 0)$ پیوسته است. با توجه به بحث فوق هرگاه به جای $\|\cdot\|_\infty$ از $\|\cdot\|_2$ استفاده کنیم به سهولت پیوستگی تابع در $(0, 0)$ با این نرم میسر است. برای این کار فرض کنید $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|f(x, y)\|_2 &= \frac{(xy^2)^2 + x^4 \sin^2 y + \frac{y^4}{4}}{(x^2 + y^2)^2} \leq \\ &\leq \frac{(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\leq 3(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

پس داریم :

$$\|f(x, y)\|_2 \leq 3(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

لذا کافی است $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ اختیار شود و f با $\|\cdot\|_2$ پیوسته است، چون با توجه به قضیه

بعد $\|\cdot\|_\infty$ و $\|\cdot\|_2$ معادل‌اند لذا f پیوسته است.

۷-۱-۱ تعریف. فضای برداری V با نرمهای $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ داده شده است گوییم $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ معادلاند هرگاه $M > 0$ و $m > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in V$ داشته باشیم

$$m \leq \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \leq M$$

رابطه بالا را به شکل زیر می توان نوشت

$$\forall x \in E \quad m \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \|x\|_1$$

تذکر ۱. رابطه فوق بین نرمهای تعریف شده روی یک فضای برداری V یک

رابطه هم ارزی است

تذکر ۲. هرگاه $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ دو نرم معادل روی V باشند این بدان معنی است که نگاشت های همانی از $(V, \|\cdot\|_1)$ به $(V, \|\cdot\|_2)$ همئومورفیسم است. لذا مفاهیم مجموعه باز - مجموعه بسته - مجموعه فشرد - مجموعه همبند - دنباله همگرا - دنباله کوشی - مجموعه کامل یا تمام نسبت به متریک های القا شونده از این دو نرم یکی هستند. قضیه زیر معادل بودن هر دو نرم را روی فضای با بعد متناهی تضمین می کند.

۸-۱-۱ قضیه. هر دو نرم روی یک فضای برداری حقیقی V با بعد متناهی معادل است.

اثبات. فرض کنیم $\dim V = n$ و $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ پایه ای برای V باشد با استفاده از B از پایه B اختیار شده $\|\cdot\|_B$ را روی V به صورت

$$u \in V \quad \text{تعریف می کنیم نگاشت} \quad \|u\|_B = \left\| \sum_{i=1}^n u_i e_i \right\|_B = \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

نه تنها یک یکریختی خطی است بلکه نرم بالا را $I\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i\right) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$(\|\cdot\|_B)$ به نرم اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ متناظر می کند. حال چون کره واحد در فضاهای

اقلیدسی فشرده است (زیرا بسته و کراندار است) لذا کره واحد در V ،
 $B_1(0) = \{u \in V : \|u\|_B = 1\}$ نسبت به متریک القا شده از $\|\cdot\|_B$ فشرده می‌باشد.
 برای اثبات قضیه کافی است ثابت کنیم $\|\cdot\|'_B: V \rightarrow R$ هرگاه که متریک القا شده از
 $\|\cdot\|_B$ را روی V منظور کنیم پیوسته است. (در اینجا منظور از $\|\cdot\|'_B$ نرم دلخواه

دیگری روی V است.) برای هر $x, y \in V$ و $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ و $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ داریم

$$\begin{aligned} |\|x\|'_B - \|y\|'_B| &\leq \|x - y\|'_B \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) e_i \right\|'_B \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \|e_i\|'_B \end{aligned}$$

اگر $c = \max \{\|e_1\|'_B, \dots, \|e_n\|'_B\}$ و δ را به صورت $\delta \leq \frac{\varepsilon}{nc}$ بگیریم نتیجه
 می‌شود $\|x - y\|_B < \delta \Rightarrow |\|x\|'_B - \|y\|'_B| < \varepsilon$
 می‌دهد حال از کران‌داری تابع پیوسته $\|\cdot\|'_B$ روی مجموعه فشرده $B_1(0)$ و خاصیت
 اول نرم، وجود اعداد اکیداً مثبت M و m تضمین می‌شود به طوری
 که $\forall x \in B_1(0)$ ، $m \leq \|x\|'_B \leq M$ و چون برای هر $u \neq 0$ از V داریم

$$\frac{u}{\|u\|_B} \in B_1(0) \quad \text{در نتیجه خواهیم داشت:}$$

$$m \leq \left\| \frac{u}{\|u\|_B} \right\|'_B = \frac{\|u\|'_B}{\|u\|_B} \leq M$$

که همان تعریف معادل بودن نرم‌هاست.

تذکره. شرط متناهی بودن بعد در قضیه بالا یک شرط اساسی است به عنوان

مثال فرض کنید $V = C_R[0, 1]$ فضای توابع حقیقی پیوسته روی فاصله $[0, 1]$ باشد
 نرم‌های $\|\cdot\|_B$ و $\|\cdot\|'_B$ را روی V به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\} \quad \forall f \in V$$

$$\|f\|' = \int_0^1 |f(x)| dx$$

با توجه به پیوستگی f ، $\|f\|' = 0$ نتیجه می‌دهد $f = 0$ ، دنباله $\{f_n\}$ را در V به صورت

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -2nx + 2 & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. $\{f_n\}$ نسبت به نرم $\|\cdot\|'$ به تابع صفر همگرا است زیرا:

$$\|f_n - 0\|' = \int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{2n}$$

در صورتی که $\{f_n\}$ نسبت به نرم $\|\cdot\|$ به تابع ثابت صفر همگرا نیست

$$\|f_n - 0\| = \sup\{|f_n(x)| : x \in [0,1]\} = 1$$

این بدان معنی است که دو نرم $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|'$ روی V معادل نیستند.

۹-۱-۱ تعریف. فرض کنید $L(V, W)$ فضای تبدیلات خطی از V به W باشد که

$(V, \|\cdot\|_1)$ و $(V, \|\cdot\|_1)$ فضاهای برداری نرم‌دار هستند. برای هر $T \in L(V, W)$

نرم T یعنی $\|T\|$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_r : \|x\|_1 \leq 1\}$$

با توجه به خاصیت خطی T برای هر $x \in V$ با $\|x\|_1 \leq 1$ داریم

$$\|Tx\|_r \leq \|T\|$$

چون برای هر $y \in V$ ، $\| \frac{y}{\|y\|_1} \|_1 = 1$ لذا

$$\frac{1}{\|y\|} \|Ty\|_r = \left\| T \frac{y}{\|y\|} \right\|_r \leq \|T\|$$

در نتیجه برای هر $y \in V$

$$\|Ty\|_r \leq \|T\| \|y\|$$

همچنین اگر عدد طبیعی M موجود باشد به طوری که برای هر $y \in V$ داشته باشیم

$$\|Ty\|_r \leq M \|y\| \quad \|T\| \leq M \quad \text{در این صورت}$$

تذکر. از این به بعد برای اختصار و سهولت اندیس نرم‌ها حذف می‌کنیم لیکن

بایستی توجه داشت نرم مد نظر روی چه فضایی است.

نرم تعریف شده روی فضای $L(V, W)$ خواص نرم را داراست :

$$\|T\| \geq 0, \quad \|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$$

$$\|cT\| = |c| \|T\|$$

برای هر $T, S \in L(V, W)$ و هر اسکالر c :

$$\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$$

همچنین هرگاه V و W و H فضاهای نرم‌دار و $T \in L(V, W)$ و $S \in L(W, H)$

آنگاه

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$$

۱-۱-۱۰ تعریف. فرض کنید V و W فضاهای نرم‌دار و $T \in L(V, W)$. تبدیل

T کران‌دار است اگر $\|T\| < \infty$. باید توجه داشت این مفهوم کران‌داری برای توابع

خطی با مفهوم کران‌داری توابع در ریاضی عمومی و آنالیز ۱ و ۲ فرق خواهد داشت به

عنوان مثال تابع خطی $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $f(x) = 2x$ از این نقطه نظر کران‌داری که

عدد $M > 0$ موجود باشد به طوری که $|f(x)| \leq M$ برای $x \in \mathbb{R}$ کران‌دار

نیست لیکن با توجه به مفهوم کران‌داری تبدیلات خطی تعریف شده در ۱-۱-۹

کران‌دار است زیرا $\|f\| = 2$

۱-۱-۱۱ قضیه. فرض کنید V و W فضاهای نرم‌دار و $T \in L(V, W)$ در این صورت موارد زیر معادل‌اند

الف) T کران‌دار است ب) T پیوسته است

اثبات قضیه به عنوان تمرین در نظر گرفته شده و در هر کتاب آنالیز تابعی می‌توان یافت.

نتیجه. با توجه به قضیه ۱-۱-۵ T کران‌دار است اگر و تنها اگر T در صفر پیوسته باشد در این جا تذکر این نکته بجاست که همه تبدیلات خطی روی فضاهایی با بعد متناهی کران‌دارند این حالتی است که در بعد نامتناهی همواره درست نمی‌باشد.

۱-۱-۱۲ مثال. فرض کنید $V = C^\infty[0, 1]$ فضای توابع حقیقی از هر مرتبه مشتق‌پذیر روی $[0, 1]$ باشد. نرم را روی V همان سوپریمم نرم یعنی $\|f\| = \sup\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$ و $f \in V$ در نظر می‌گیریم. عملگر مشتق D روی V یعنی $D: V \rightarrow V$ و $D(f) = f'$ ، به وضوح یک تبدیل خطی روی V می‌باشد که پیوسته نیست (کران‌دار نیست) زیرا هرگاه دنباله $\{f_n(x)\}$ را در V به صورت $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ در نظر بگیریم دنباله $\{f_n\}$ به سمت تابع $f \equiv 0$ همگراست در صورتی که $D(f_n(x)) = \cos nx$ به سمت $D(0) = 0$ همگرا نیست لذا D پیوسته نیست.

فرض کنید V یک فضای برداری نرم‌دار و $L(v)$ فضای عملگرهای روی V باشد فرض کنید Ω مجموعه عملگرهای وارون‌پذیر روی V باشد قضیه بعد نشان دهنده این واقعیت است که Ω زیر مجموعه بازی از $L(V)$ است و نگاشت $T \rightarrow T^{-1}$ بر Ω یک همئومورفیسم (دو سویی - پیوسته و باز) است.

$$\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|} \text{ و } S \in L(V) \text{ و } T \in \Omega \text{ هرگاه الف : قضیه ۱۳-۱-۱}$$

آنگاه $S \in \Omega$

الف) نگاشت $i: \Omega \rightarrow \Omega$ و $i(T) = T^{-1}$ بر Ω پیوسته است.

ب) بدان معنی است که همسایگی به مرکز T و شعاع $\frac{1}{\|T^{-1}\|}$ در Ω واقع است یعنی Ω مجموعه‌ای باز است و با توجه به اینکه نگاشت i با معکوس‌اش برابر است (ب) بدان معنی است که i همئومورفیسم می‌باشد.

اثبات الف) فرض کنید $T \in \Omega$ و $\|S - T\| \leq \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ به ازای هر $x \in V$

$$\frac{\|x\|}{\|T^{-1}\|} = \frac{\|T^{-1}Tx\|}{\|T^{-1}\|} \leq \frac{\|T^{-1}\|\|Tx\|}{\|T^{-1}\|} = \|(T - S)x + Sx\| \leq \|(T - S)x\| + \|Sx\| \leq \|T - S\|\|x\| + \|Sx\|$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\|x\| \left(\frac{1}{\|T^{-1}\|} - \|T - S\| \right) \leq \|Sx\| \quad (I)$$

که نشان می‌دهد اگر $x \neq 0$ آنگاه $Sx \neq 0$ یعنی S یک به یک است و بنابراین $S \in \Omega$ وارون‌پذیر و.

اثبات ب) هرگاه در رابطه (I) را با $S^{-1}x$ عوض کنیم که در آن

$$\|T - S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|} \text{ داریم}$$

$$\|S^{-1}x\| \leq \left(\frac{1}{\|T^{-1}\|} - \|T - S\| \right)^{-1} \|x\|$$

که با توجه به توضیحات آخر ۱-۱-۸ نتیجه می‌شود:

$$\|S^{-1}\| \leq \left(\frac{1}{\|T^{-1}\|} - \|T - S\| \right)^{-1}$$