



نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

(رشته مهندسی کامپیوتر)

مهندس امید جلیلیان

دکتر حسن ختن‌لو

«عضو هیئت علمی دانشگاه پیام‌نور»

«عضو هیئت علمی دانشگاه بوعلی سینا همدان»

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه ملی، که یک واجب دینی است.^۱

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه مطالعه هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

۱. پیام مقام معظم رهبری به مناسبت آغاز هفته کتاب ۷۲/۱۰/۴

سوره‌ای که بر آن فرستاده عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «إِقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

پیشگفتار	یازده
فصل اول: مقدمه‌ای بر نظریه محاسبات	۱
هدف کلی	۱
هدف‌های یادگیری	۱
مقدمه	۲
۱-۱ اصطلاحات ریاضی مقدماتی	۳
۱-۱-۱ نظریه مجموعه‌ها	۳
۲-۱-۱ توابع و روابط	۶
۳-۱-۱ روش‌های اثبات	۸
۴-۱-۱ گراف و درخت	۱۱
۲-۱ مفاهیم اساسی	۱۳
۱-۲-۱ رشته	۱۳
۲-۲-۱ عملگرهای رشته	۱۳
۳-۲-۱ زبان	۱۷
۴-۲-۱ عملگرهای زبان	۱۷
۵-۲-۱ گرامر	۲۳
۶-۲-۱ اتوماتا	۲۷
۳-۱ دسته‌بندی مفاهیم اساسی	۲۹
۱-۳-۱ انواع گرامرها	۲۹
۲-۳-۱ انواع زبان‌ها	۳۰
۳-۳-۱ انواع اتوماتا	۳۰
خلاصه فصل اول	۳۲
خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل اول	۳۳
خودآزمایی تشریحی فصل اول	۳۳

۳۷	فصل دوم: آتوماتای متناهی
۳۷	هدف کلی
۳۷	هدف‌های یادگیری
۳۸	مقدمه
۳۹	۱-۲ انواع آتوماتای متناهی
۳۹	۲-۲ پذیرنده متناهی معین
۴۰	۱-۲-۲ عملکرد پذیرنده متناهی معین
۴۲	۲-۲-۲ نمایش آتوماتای متناهی
۴۲	۱-۲-۲-۲ تابع انتقال
۴۲	۲-۲-۲-۲ جدول انتقال
۴۲	۳-۲-۲-۲ گراف انتقال
۴۴	۳-۲-۲ پذیرش رشته در آتوماتای متناهی معین
۴۶	۴-۲-۲ تابع گذر تعمیم یافته
۴۷	۵-۲-۲ آتوماتای متناهی معین به‌عنوان پذیرنده زبان
۵۲	۶-۲-۲ آتوماتای متناهی به‌عنوان پذیرنده زبان‌های منظم
۵۵	۷-۲-۲ حالت تله
۵۶	۳-۲ پذیرنده متناهی نامعین
۵۶	۱-۳-۲ پذیرنده متناهی نامعین بدون گذر λ
۵۸	۲-۳-۲ پذیرش رشته در آتوماتای متناهی نامعین
۶۰	۳-۳-۲ آتوماتای متناهی نامعین به‌عنوان پذیرنده زبان
۶۳	۴-۳-۲ پذیرنده متناهی نامعین با گذر λ
۶۵	۴-۲ هم‌ارزی پذیرنده‌های متناهی معین و نامعین
۶۸	۱-۴-۲ روال تبدیل آتوماتای متناهی نامعین به معین
۷۳	۵-۲ کمینه‌سازی تعداد حالات آتوماتای متناهی
۷۴	۱-۵-۲ روال علامت‌گذاری
۷۵	۲-۵-۲ روال کاهش حالات
۷۹	خلاصه فصل دوم
۸۱	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل دوم
۸۳	خودآزمایی تشریحی فصل دوم
۸۷	فصل سوم: زبان‌ها و گرامرهای منظم
۸۷	هدف کلی
۸۷	هدف‌های یادگیری
۸۸	مقدمه
۸۸	۱-۳ عبارات منظم
۸۸	۱-۱-۳ تعریف صوری عبارت منظم
۸۹	۲-۱-۳ زبان‌های مرتبط با عبارات منظم

۹۳	۲-۳ ارتباط بین عبارات منظم و زبان‌های منظم
۹۳	۱-۲-۳ آتوماتای متناهی و عبارات منظم
۹۴	۲-۲-۳ روال ساخت NFA از عبارات منظم
۹۶	۳-۲-۳ گراف انتقال تعمیم‌یافته
۹۸	۴-۲-۳ روال تبدیل NFA به عبارت منظم
۱۰۲	۳-۳ گرامر منظم
۱۰۶	۱-۳-۳ گرامر منظم و آتوماتای متناهی
۱۰۷	۲-۳-۳ تبدیل گرامر منظم به NFA معادل
۱۰۹	۳-۳-۳ ساخت گرامر منظم از آتوماتای متناهی
۱۱۰	۴-۳-۳ تبدیل NFA به گرامر منظم
۱۱۱	۵-۳-۳ گرامر خطی چپ
۱۱۴	خلاصه فصل سوم
۱۱۵	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل سوم
۱۱۶	خودآزمایی تشریحی فصل سوم
۱۱۹	فصل چهارم: ویژگی‌های زبان‌های منظم
۱۱۹	هدف کلی
۱۱۹	هدف‌های یادگیری
۱۲۰	مقدمه
۱۲۰	۱-۴ ویژگی‌های بستاری زبان‌های منظم
۱۲۳	۱-۱-۴ هم‌ریختی
۱۲۵	۲-۱-۴ نسبت راست و نسبت چپ
۱۲۸	۲-۴ سؤالات مقدماتی در مورد زبان‌های منظم
۱۳۰	۳-۴ شناسایی زبان‌های نامنظم
۱۳۰	۱-۳-۴ لم تزریق
۱۳۷	خلاصه فصل چهارم
۱۳۸	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل چهارم
۱۳۸	خودآزمایی تشریحی فصل چهارم
۱۴۱	فصل پنجم: زبان‌های مستقل از متن
۱۴۱	هدف کلی
۱۴۱	هدف‌های یادگیری
۱۴۲	مقدمه
۱۴۳	۱-۵ گرامرهای مستقل از متن
۱۴۸	۱-۱-۵ اشتقاق در گرامر مستقل از متن
۱۵۰	۲-۱-۵ اشتقاق راست و اشتقاق چپ
۱۵۱	۳-۱-۵ درخت اشتقاق

۱۵۳	۲-۵ ابهام در گرامرها و زبان‌ها
۱۵۹	۱-۲-۵ گرامر ساده
۱۶۱	۳-۵ مقدمه‌ای بر پارسرها
۱۶۲	۱-۳-۵ گراف یک گرامر
۱۶۴	۲-۳-۵ پارسر بالا به پایین
۱۶۸	۳-۳-۵ پارسر پایین به بالا
۱۷۱	خلاصه فصل پنجم
۱۷۲	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل پنجم
۱۷۳	خودآزمایی تشریحی فصل پنجم
۱۷۷	فصل ششم: ساده‌سازی گرامرهای مستقل از متن و فرم‌های نرمال
۱۷۷	هدف کلی
۱۷۷	هدف‌های یادگیری
۱۷۸	مقدمه
۱۷۸	۱-۶ حذف قوانین بازگشتی چپ مستقیم
۱۷۹	۱-۱-۶ روال حذف قوانین بازگشتی چپ مستقیم
۱۸۰	۲-۶ حذف قوانین غیرمفید
۱۸۳	۱-۲-۶ روال حذف قوانین غیرمفید
۱۸۶	۳-۶ حذف قوانین λ
۱۸۸	۱-۳-۶ روال حذف قوانین λ
۱۹۰	۴-۶ حذف قوانین واحد
۱۹۰	۱-۴-۶ روال حذف قوانین واحد
۱۹۴	۵-۶ فرم نرمال چامسکی
۱۹۵	۱-۵-۶ روال ساخت گرامر مستقل از متن در فرم نرمال چامسکی
۲۰۰	۶-۶ فرم نرمال گریباخ
۲۰۱	۱-۶-۶ روال ساخت گرامر مستقل از متن در فرم نرمال گریباخ
۲۰۳	۷-۶ الگوریتم CYK
۲۰۶	خلاصه فصل ششم
۲۰۸	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل ششم
۲۰۹	خودآزمایی تشریحی فصل ششم
۲۱۳	فصل هفتم: آتوماتای پشته‌ای
۲۱۳	هدف کلی
۲۱۳	هدف‌های یادگیری
۲۱۴	مقدمه
۲۱۶	۱-۷ انواع آتوماتای پشته‌ای
۲۱۶	۲-۷ آتوماتای پشته‌ای نامعین

۲۱۷	۷-۲-۱ عملکرد آتوماتای پشته‌ای نامعین
۲۱۸	۷-۲-۲ نمایش آتوماتای پشته‌ای
۲۱۹	۷-۲-۲-۱ تابع انتقال
۲۱۹	۷-۲-۲-۲ گراف انتقال
۲۲۱	۷-۲-۳ پذیرش رشته در آتوماتای پشته‌ای نامعین
۲۲۴	۷-۲-۴ زبان آتوماتای پشته‌ای نامعین
۲۲۸	۷-۳ آتوماتای پشته‌ای و زبان‌های مستقل از متن
۲۲۸	۷-۳-۱ آتوماتای پشته‌ای برای زبان‌های مستقل از متن
۲۲۹	۷-۳-۲ روال ساخت آتوماتای پشته‌ای با استفاده از گرامر فرم نرمال گریباخ
۲۳۲	۷-۴ آتوماتای پشته‌ای معین
۲۳۷	خلاصه فصل هفتم
۲۳۸	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل هفتم
۲۴۰	خودآزمایی تشریحی فصل هفتم
۲۴۳	فصل هشتم: ویژگی‌های زبان‌های مستقل از متن
۲۴۳	هدف کلی
۲۴۳	هدف‌های یادگیری
۲۴۴	مقدمه
۲۴۴	۸-۱ لم تزریق برای زبان‌های مستقل از متن
۲۴۹	۸-۲ لم تزریق برای زبان‌های خطی
۲۵۲	۸-۳ ویژگی‌های بستاری زبان‌های مستقل از متن
۲۵۶	۸-۴ ویژگی‌های تصمیم‌پذیر زبان‌های مستقل از متن
۲۵۷	خلاصه فصل هشتم
۲۵۸	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل هشتم
۲۵۹	خودآزمایی تشریحی فصل هشتم
۲۶۳	فصل نهم: ماشین‌های تورینگ
۲۶۳	هدف کلی
۲۶۳	هدف‌های یادگیری
۲۶۴	مقدمه
۲۶۵	۹-۱ ماشین تورینگ استاندارد
۲۶۷	۹-۱-۱ عملکرد ماشین تورینگ
۲۶۸	۹-۱-۲ نمایش ماشین تورینگ
۲۶۸	۹-۱-۲-۱ تابع انتقال
۲۶۸	۹-۱-۲-۲ گراف انتقال
۲۶۹	۹-۱-۳ خصوصیات ماشین تورینگ استاندارد
۲۶۹	۹-۱-۴ پذیرش رشته در ماشین تورینگ

۲۷۱	۹-۱-۵ ماشین تورینگ به عنوان پذیرنده زبان
۲۷۶	۹-۲ ماشین های تورینگ به عنوان مبدل
۲۸۱	۹-۳ تز تورینگ
۲۸۳	۹-۴ مدل های دیگر ماشین تورینگ
۲۸۴	۹-۴-۱ هم ارزی بین گروه های مختلف اتوماتا
۲۸۴	۹-۴-۲ ماشین تورینگ با حالت توقف
۲۸۵	۹-۴-۳ ماشین تورینگ چندشیاره
۲۸۷	۹-۴-۴ ماشین تورینگ با نوار نیمه نامتناهی
۲۸۸	۹-۴-۵ ماشین تورینگ برون خطی
۲۸۹	۹-۴-۶ ماشین تورینگ چندنواره
۲۹۱	۹-۴-۷ ماشین تورینگ چندبعدی
۲۹۲	۹-۴-۸ ماشین تورینگ نامعین
۲۹۴	۹-۵ اتوماتای کراندار خطی
۲۹۵	خلاصه فصل نهم
۲۹۷	خودآزمایی چهارگزینه ای فصل نهم
۲۹۹	خودآزمایی تشریحی فصل نهم
۳۰۳	فصل دهم: طبقه بندی چامسکی
۳۰۳	هدف کلی
۳۰۳	هدف های یادگیری
۳۰۴	مقدمه
۳۰۴	۱۰-۱ زبان های بازگشتی و شمارش پذیر بازگشتی
۳۰۶	۱۰-۲ گرامرهای بدون محدودیت
۳۱۰	۱۰-۳ گرامرها و زبان های حساس به متن
۳۱۰	۱۰-۳-۱ زبان های حساس به متن و اتوماتای کراندار خطی
۳۱۳	۱۰-۳-۲ ارتباط بین زبان های حساس به متن و بازگشتی
۳۱۵	۱۰-۴ طبقه بندی چامسکی
۳۱۷	خلاصه فصل دهم
۳۱۸	خودآزمایی چهارگزینه ای فصل دهم
۳۲۰	خودآزمایی تشریحی فصل دهم
۳۲۳	پاسخنامه
۳۲۵	واژه نامه فارسی - انگلیسی
۳۲۹	واژه نامه انگلیسی - فارسی
۳۳۳	منابع

پیشگفتار

کتاب نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها (The Theory of Formal Languages and Automata) مقدمه‌ای بر نظریه زبان‌ها و اتوماتا است که برای دانشجویان کارشناسی رشته‌های مهندسی و علوم کامپیوتر طراحی شده است. در این کتاب مدل‌های مختلف محاسباتی، بیان رسمی مدل‌ها و گرامرها، خواص محاسباتی و کاربردهای آن‌ها، مفاهیم تصمیم‌پذیری و ماشین تورینگ بررسی می‌شوند. پیش‌نیازهای لازم برای استفاده و یادگیری این کتاب مهارت در درس برنامه‌سازی پیشرفته، آشنایی با ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها و همچنین آشنایی با مباحث مرتبط با ساختمان‌های گسسته است. هدف از مطالعه و یادگیری مطالب این کتاب داشتن دانش پایه و پیش‌نیازی برای دروس طراحی کامپایلرها، طراحی الگوریتم‌ها، نظریه محاسبات و همچنین دروس مرتبط با توصیف و مدل‌سازی رسمی سامانه‌های کامپیوتری است.

با توجه به اهمیت درس نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها برای داشتن دانش پایه در علوم محاسبات و همچنین اهمیت آن در آزمون‌های مختلف برای دانشجویان، انگیزه‌ای برای نویسندگان ایجاد شد تا براساس سال‌ها تجربه تدریس این درس و دروس پیش‌نیاز و همچنین با استفاده از مطالب کتاب‌های مرجع ارائه شده در دانشگاه‌های معتبر بین‌المللی کتابی جامع، ساده و مساله محور ارائه نمایند. برای پرهیز از تئوری صرف و اثبات طولانی قضایا، همچنین جلوگیری از خستگی خواننده و از طرف دیگر با آگاهی از دیدگاه بسیاری از دانشجویان مهندسی کامپیوتر بر تمایل به یادگیری مطالب کاربردی، سعی شده است که ارائه قضایا و اثبات آن‌ها به خلاصه‌ترین شکل ممکن

صورت گرفته و سادگی در ارائه مطالب نیز رعایت گردد. همچنین مطالب این کتاب بیشتر به سمت مساله محوری رفته است تا علاقه دانشجویان مبنی بر یادگیری مطالب کاربردی و مساله محور نیز رعایت گردد. اعتقاد داریم که با مطالعه کتاب‌هایی که به صورت مساله محور نگارش شده‌اند علاوه بر اینکه دانشجویان با قضایا و مباحث تئوری آشنا می‌شوند با نحوه به کارگیری آن‌ها برای حل مسائل نیز آشنا خواهند شد. در انتهای هر فصل نیز مسائل و تمرین‌های متعددی گردآوری و ارائه شده‌اند تا خواننده با تمرکز بر حل آن‌ها جنبه مساله محوری را تقویت کند و علاوه بر تمرین بیشتر، نحوه استفاده از قضایای ریاضی و محاسباتی را در حل مسائل ممارست نماید.

این کتاب در ده فصل تنظیم شده است که کلیه سرفصل‌های مشخص شده برای درس نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها توسط شورای عالی برنامه‌ریزی را پوشش می‌دهد. فصل اول به مقدمه‌ای بر نظریه محاسبات می‌پردازد تا دانشجو بتواند یک دید کلی نسبت به مفاهیم اساسی نظریه اتوماتا شامل زبان، گرامر و اتومات پیدا نماید. در فصل دوم اتوماتای متناهی و مسائل مربوط به آن ارائه گردیده است. در فصل سوم زبان‌ها و گرامرهای منظم و در فصل چهارم ویژگی‌های زبان‌های منظم مورد بحث قرار گرفته است. در فصل پنجم مطالب مرتبط با زبان‌های مستقل از متن و پارسرها در اختیار خوانندگان قرار گرفته است. ساده‌سازی گرامرهای مستقل از متن و فرم‌های نرمال مطالبی هستند که در فصل ششم به خوانندگان ارائه گردیده است. در فصل هفتم اتوماتای پشته‌ای و مسائل مرتبط با آن مورد بحث قرار گرفته است و فصل هشتم نیز به بررسی ویژگی‌های زبان‌های مستقل از متن می‌پردازد. در فصل نهم ماشین‌های تورینگ و همچنین مدل‌های دیگر این ماشین به خوانندگان ارائه گردیده است. در نهایت فصل دهم به مطالب و مسائل مرتبط با زبان‌های بازگشتی، گرامر بدون محدودیت و حساس به متن و همچنین طبقه‌بندی چامسکی می‌پردازد.

در انتها لازم است از زحمات آقای پویا قربانی دانشجوی رشته مهندسی کامپیوتر برای رسم دقیق شکل‌های کتاب قدردانی نمایم.

فصل اول

مقدمه‌ای بر نظریه محاسبات

هدف کلی

مروری بر ریاضیات مقدماتی، آشنایی با مفاهیم اساسی نظریه اتوماتا، مروری بر دسته‌بندی مفاهیم اساسی و شناخت ارتباط بین آن‌ها

هدف‌های یادگیری

دانشجویان گرامی پس از مطالعه این فصل می‌توانند:

۱. برخی از مهم‌ترین نظریات اساسی ریاضیات را به‌منظور آشنایی با مفاهیم ریاضی به‌کاررفته در فصل‌های بعدی بیاموزند و با نمادهای استفاده‌شده در متن کتاب آشنایی پیدا کنند.
۲. با مفاهیم گراف‌های جهت‌دار که برای نمایش گرافیکی مفاهیم زبان‌های صوری و تئوری اتوماتا مورد استفاده قرار می‌گیرند، آشنایی پیدا کنند.
۳. در مورد تعاریف و نمادهای مفاهیم اساسی نظریه اتوماتا شامل زبان، گرامر و اتوماتات شناخت پیدا کنند.
۴. با شناخت مفاهیم اساسی و آگاهی از ارتباط آن‌ها با یکدیگر درک بهتری نسبت به مطالب فصل‌های بعدی پیدا کنند.

مقدمه

موضوع اصلی این کتاب یعنی نظریه زبان‌ها شامل موضوعات مختلفی از قبیل نظریه اتوماتا، گرامرها و زبان‌های صوری می‌باشد. این موضوعات در مجموع پایه نظری علوم کامپیوتر را تشکیل می‌دهند. به بیان ساده‌تر اتوماتا، گرامرها و محاسبه‌پذیری را می‌توان به‌عنوان مطالعه قابلیت‌های کلی کامپیوترها در نظر گرفت. در این کتاب انواع مختلف اتوماتا را مطالعه می‌کنیم و ارتباط آن‌ها با زبان‌ها و گرامرها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. باید به خاطر داشت که این نظریه برخلاف کاربردهای متعدد به‌طور ذاتی انتزاعی و ریاضی است.

در این کتاب مدل‌هایی را بررسی می‌کنیم که ویژگی‌های تمامی کامپیوترها و کاربردهای آن‌ها را نشان می‌دهند. برای مدل‌سازی سخت‌افزاری یک کامپیوتر مفهوم اتومات^۱ (جمع آن اتوماتا^۲ نام دارد) را طرح می‌کنیم. اتومات ساختاری است که همه خصوصیات ضروری یک کامپیوتر دیجیتال را دارد. اتومات ورودی را می‌پذیرد و براساس آن خروجی را تولید می‌کند. همچنین ممکن است دارای یک حافظه موقت باشد و می‌تواند در تبدیل ورودی به خروجی تصمیم‌گیری نماید. یک زبان صوری^۳ یک مدل انتزاعی از ویژگی‌های عمومی یک زبان برنامه‌سازی است. یک زبان صوری شامل مجموعه‌ای از علائم و تعدادی قانون است که از آن‌ها برای ترکیب این علائم و ایجاد موجودیت‌هایی به‌نام جمله استفاده می‌کند. هرچند که بعضی از زبان‌های صوری که در این کتاب مطالعه خواهیم کرد ساده‌تر از زبان‌های برنامه‌سازی هستند اما در بسیاری از خصوصیات اساسی باهم مشترک می‌باشند.

در این فصل با بررسی نظریات اساسی تلاش می‌کنیم زمینه را برای مطالعات بعدی فراهم کنیم. در بخش ۱-۱ نظریات اصلی در ریاضیات را، که در فصل‌های بعدی مورد نیاز می‌باشند، مرور خواهیم کرد. در بخش ۱-۲ نگاهی گذرا به مفاهیم اصلی زبان‌ها، گرامرها و اتوماتا خواهیم داشت که به‌شکل‌های مختلفی در سراسر کتاب تکرار می‌شوند. در بخش ۱-۳ نیز انواع هر یک از مفاهیم اساسی و ارتباط آن‌ها با یکدیگر به‌طور خلاصه معرفی خواهند شد.

1. Automaton

2. Automata

3. Formal Language

۱-۱ اصطلاحات ریاضی مقدماتی

برای مطالعه این کتاب لزومی به یک پیش‌زمینه کامل از ریاضیات وجود ندارد. در این فصل به مروری بر عملیات پایه‌ای نظریه مجموعه‌ها، توابع، روابط و روش‌های اثبات قضایا می‌پردازیم. در ادامه، این بخش را با مقدمه‌ای بر گراف‌های جهت‌دار که برای نمایش گرافیکی مفاهیم زبان‌های صوری و تئوری اتوماتا مورد استفاده قرار می‌گیرند، خاتمه می‌دهیم.

۱-۱-۱ نظریه مجموعه‌ها^۱

در این بخش مفاهیم و نمادهای نظریه مجموعه‌ها به‌طور خلاصه مورد بررسی قرار خواهند گرفت. نماد $\in$ به معنای عضویت است و $x \in S$ مشخص می‌کند که x یک عضو از مجموعه S می‌باشد. بالعکس عبارت $x \notin S$ به این معنی است که x متعلق به مجموعه S نیست. در این کتاب مجموعه‌ها را با حروف بزرگ و اعضای آن‌ها را با حروف کوچک نمایش می‌دهیم.

از دو نماد $\{\}$ برای تعریف یک مجموعه استفاده می‌شود. اعضای یک مجموعه را می‌توان با یک بیان توصیفی از آن در آکولاد مشخص کرد. برای مثال مجموعه اعداد صحیح ۱، ۲ و ۳ به صورت $S = \{1, 2, 3\}$ نمایش داده می‌شود. در صورتی که اعضای یک مجموعه مشخص بوده و دارای تعداد زیادی عضو باشد، از نقطه‌چین در توصیف مجموعه استفاده می‌شود. بنابراین $\{a, b, c, \dots, z\}$ نشان‌دهنده حروف کوچک انگلیسی و $\{1, 3, 5, \dots\}$ بیانگر مجموعه اعداد صحیح فرد مثبت است. مجموعه‌هایی که تعداد نامتناهی عضو دارند به‌صورت ضمنی تعریف می‌شوند. چنین مجموعه‌هایی با بیان شرایطی که اعضای آن‌ها را توصیف می‌کند، تعریف می‌شوند. برای مثال می‌توان نوشت:

$$S = \{i : i > 0, \text{ فرد است}\}$$

این عبارت به مجموعه اعداد صحیح اشاره می‌کند و به‌صورت " S مجموعه تمام i های فرد بزرگتر از صفر است" خوانده می‌شود. مجموعه تهی مجموعه‌ای است که هیچ عضوی ندارد و با نماد $\emptyset$ نمایش داده می‌شود.

یک مجموعه با اعضایش مشخص می‌شود و ترتیب عناصر آن اهمیتی ندارد. همچنین باید دقت داشت که تکرار در تعریف اعضای یک مجموعه هیچ تاثیری بر اعضای مجموعه ندارد. دو مجموعه معادل هستند اگر دارای اعضا یکسانی باشند. بنابراین مجموعه‌های

$$S_1 = \{1, 2, 3\}, \quad S_2 = \{2, 1, 3\}, \quad S_3 = \{1, 3, 2, 2\}$$

باهم مساوی هستند چرا که هر سه مجموعه دارای اعضای مشابهی هستند و ترتیب و تکرار عناصر در تعریف مجموعه‌ها بی‌تاثیر است. اگر همه اعضای مجموعه S_1 عضو S باشند، مجموعه S_1 زیرمجموعه S نامیده می‌شود و می‌نویسیم $S_1 \subseteq S$. مجموعه تهی یک زیرمجموعه از هر مجموعه‌ای است. اگر $S_1 \subseteq S$ ، اما اگر یکی از اعضای S در S_1 وجود نداشته باشد آنگاه S_1 زیرمجموعه محض S می‌باشد و به صورت

$$S_1 \subset S$$

نوشته می‌شود. از عملیات مجموعه‌ای برای ایجاد مجموعه‌های جدید از مجموعه‌های موجود استفاده می‌شود. اجتماع^۱ دو مجموعه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_1 \cup S_2 = \{x : x \in S_1 \text{ or } x \in S_2\}$$

این به این معناست که x عضوی از $S_1 \cup S_2$ است اگر عضوی از S_1 یا S_2 یا هر دو باشد. اشتراک^۲ دو مجموعه، مجموعه‌ای از عناصر مشترک هر دو مجموعه است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_1 \cap S_2 = \{x : x \in S_1 \text{ and } x \in S_2\}$$

تفاضل^۳ دو مجموعه S_1 و S_2 شامل کلیه عناصر S_1 است که در S_2 وجود ندارد.

$$S_1 - S_2 = \{x : x \in S_1 \text{ and } x \notin S_2\}$$

عملگر مهم دیگر مکمل‌گیری^۴ است. مکمل S به صورت $\bar{S}$ نشان داده شده و شامل تمام عناصری است که در مجموعه S وجود ندارند. برای درک بهتر مطلب، مجموعه جهانی U شامل کلیه اعضای ممکن را معرفی می‌کنیم. بنابراین

$$\bar{S} = \{x : x \in U, x \notin S\}$$

1. Union
2. Intersect
3. Difference
4. Complementation

قوانین دمورگان^۱ رابطه‌های زیر، رابطه بین اجتماع، اشتراک و مکمل را نشان می‌دهند. این قضایا کاربرد وسیعی دارند و در اثبات قضایای این کتاب مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$\overline{S_1 \cup S_2} = \overline{S_1} \cap \overline{S_2}$$

$$\overline{S_1 \cap S_2} = \overline{S_1} \cup \overline{S_2}$$

مثال ۱-۱

فرض کنید $S_1 = \{0,1,2,3\}$ و $S_2 = \{2,3,4,5\}$ باشند. $\overline{S_1}$ و $\overline{S_2}$ مکمل‌های S_1 و S_2 را نسبت به مجموعه اعداد طبیعی نشان می‌دهند. این مجموعه مهم که آن را با N نشان می‌دهیم شامل اعداد $\{1,2,3,\dots\}$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} S_1 \cup S_2 &= \{0,1,2,3,4,5\} & \overline{S_2} &= \{0,1\} \cup \{n : n > 5\} \\ S_1 \cap S_2 &= \{2,3\} & \overline{S_1} &= \{n : n > 3\} \\ S_1 - S_2 &= \{0,1\} & \overline{S_1} \cap \overline{S_2} &= \{n : n > 5\} \\ S_2 - S_1 &= \{4,5\} & \overline{S_1} \cup \overline{S_2} &= \{n : n > 5\} \end{aligned}$$

یک مجموعه اگر حاوی تعداد متناهی از اجزا باشد، مجموعه متناهی و در غیر این صورت مجموعه نامتناهی نامیده می‌شود. اندازه یک مجموعه متناهی به صورت $|S|$ نشان داده می‌شود و برابر با تعداد اعضا موجود در آن است. مجموعه‌ها تعداد زیادی زیرمجموعه دارند. مجموعه کلیه زیرمجموعه‌های مجموعه S ، **مجموعه توانی**^۲ S نامیده شده و به صورت 2^S نمایش داده می‌شود.

مثال ۲-۱

اگر $S = \{1,2,3\}$ باشد. آنگاه مجموعه توانی آن

$$2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

می‌باشد. با توجه به $|S| = 3$ در نتیجه $|2^S| = 8$ است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تعداد اعضای مجموعه توانی برای مجموعه متناهی S برابر با $2^{|S|}$ است.

اگر اعضای یک مجموعه دنباله‌ای از زوج‌های مرتب اعضای مجموعه‌های دیگر باشند، آنگاه این گروه از مجموعه‌ها حاصل ضرب دکارتی^۱ نامیده می‌شوند. حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه به صورت

$$S_1 \times S_2 = \{(x, y) : x \in S_1, y \in S_2\}$$

محاسبه می‌شود.

مثال ۱-۳

با فرض $S_1 = \{0, 1\}$ و $S_2 = \{2, 3, 4, 5\}$ آنگاه

$$S_1 \times S_2 = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$$

حاصل ضرب دکارتی را می‌توان روی بیش از دو مجموعه نیز به صورت

$$S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in S_i\}$$

تعریف کرد.

۱-۱-۲ توابع و روابط^۲

تابع قانونی است که به هر یک از اعضاء یک مجموعه، عضو منحصر به فردی از مجموعه دیگر را نسبت می‌دهد. یک تابع از مجموعه S_1 به مجموعه S_2 نگاشتی از عناصر مجموعه S_1 به عناصری از S_2 است که در آن هر عضو از S_1 حداکثر به یک عضو از S_2 نگاشت می‌شود. اگر f نشان‌دهنده یک تابع باشد، آنگاه مجموعه اول دامنه تابع و مجموعه دوم برد آن نامیده می‌شود. تابع f به صورت:

$$f : S_1 \rightarrow S_2$$

تعریف می‌شود. دامنه f زیرمجموعه‌ای از S_1 و برد f زیرمجموعه‌ای از S_2 است. اگر همه اعضای S_1 دامنه تابع باشند، f تابع کامل^۳ روی S_1 و در غیر این صورت f تابع جزئی^۴ نامیده می‌شود. یک تابع را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نیز نمایش داد:

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$$

1. Cartesian Product
2. Functions and Relations
3. Total Function
4. Partial Function

که در آن x_i عضوی از دامنه تابع و y_i مقدار متناظر با آن در برد تابع است. در این مجموعه هر یک از x_i ها مجاز هستند حداکثر یک مرتبه به عنوان عضو اول استفاده شوند تا این مجموعه یک تابع را تعریف کند. در غیر این صورت مجموعه رابطه نامیده می‌شود. در یک تابع هر یک از اعضای دامنه فقط به یک عضو در برد مرتبط می‌شود اما در روابط ممکن است به ازای یک عضو دامنه چندین عضو در برد وجود داشته باشند. برای مثال در تابع $f(x) = x^2$ همه زوج‌های مرتب به وسیله (x, x^2) تعیین می‌شوند. دامنه این تابع کلیه اعداد حقیقی است. این تابع می‌تواند تنها مقادیر بزرگتر یا مساوی صفر را به خود بگیرد. در نتیجه برد تابع f اعداد حقیقی مثبت است.

تابع $f: S_1 \rightarrow S_2$ یک به یک گفته می‌شود اگر هر عضو از S_1 به یک عضو مجزا در برد نگاشت شود. به بیان دیگر f یک به یک است اگر $x_1 \neq x_2$ آنگاه به $f(x_1) \neq f(x_2)$ اشاره کند. همچنین تابع $f: S_1 \rightarrow S_2$ پوشاست اگر برد f کل مجموعه S_2 باشد.

مثال ۱-۴

فرض کنید توابع f, g و h روی مجموعه اعداد طبیعی مثبت از N به $N - \{0\}$ تعریف شده‌اند.

$$\text{الف) } f(x) = 2x + 1$$

$$\text{ب) } g(x) = \begin{cases} x & \text{در غیر این صورت} \\ 1 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{ج) } h(x) = x + 1$$

تابع f تابعی یک به یک است اما پوشا نیست زیرا برد آن شامل اعداد فرد است. تابع g پوشاست اما یک به یک نیست. تابع h پوشا و یک به یک است چرا که تناظری را بین هر عدد طبیعی و عدد بعدی آن تعریف می‌کند.

یکی از انواع رابطه‌ها، هم‌ارزی است که در واقع صورت کلی مفهوم تساوی می‌باشد. هم‌ارز بودن زوج (x, y) به صورت

$$x \equiv y$$

نشان داده می‌شود. روابطی که به‌وسیله $\equiv$ نمایش داده می‌شوند اگر از سه قانون زیر تبعیت کنند هم‌ارز نامیده می‌شوند:

۱. قانون انعکاسی

$$x \equiv x \text{ برای همه } x \text{ ها}$$

۲. قانون تقارنی

$$\text{اگر } x \equiv y \text{ آنگاه } y \equiv x$$

۳. قانون تراگذاری

$$\text{اگر } x \equiv y \text{ و } y \equiv z \text{ آنگاه } x \equiv z$$

مثال ۵-۱

روی مجموعه اعداد صحیح غیرمنفی رابطه

$$x \equiv y$$

تعریف شده است اگر و تنها اگر

$$x \bmod 3 \equiv y \bmod 3$$

در این صورت $2 \equiv 5$ ، $12 \equiv 0$. این رابطه به‌دلیل داشتن سه خصوصیت انعکاسی، تقارنی و انتقالی یک رابطه هم‌ارزی است.

۳-۱-۱ روش‌های اثبات

یکی از نیازمندی‌های این کتاب برای درک بهتر مفاهیم مطرح شده، توانایی درک اثبات‌ها می‌باشد. در این کتاب از دو روش اثبات خاص به‌نام‌های اثبات با استفاده از استقراء^۱ و اثبات با استفاده از برهان خلف^۲ استفاده می‌شود.

در استقراء درستی تعدادی از عبارات می‌تواند از درستی چند نمونه خاص استنباط شود. ابتدا نشان می‌دهیم که چیزی که در حال اثبات آن هستیم به‌ازای $n = 1$ درست می‌باشد. سپس نشان می‌دهیم که اگر عبارت به‌ازای یک عدد صحیح مثبت دلخواه n درست باشد به‌ازای $n + 1$ نیز درست است. می‌دانیم که چون عبارت برای $n = 1$ درست است پس برای $n = 2$ نیز درست می‌باشد و چون عبارت برای $n = 2$

درست است پس برای $n = 3$ نیز درست خواهد بود و الی آخر. در استقراء از مفاهیم زیر استفاده می‌کنیم:

❖ پایه استقراء: عبارت به‌ازای $n = 1$ (یا هر مقدار اولیه دیگر) درست است.

❖ فرض استقراء: عبارت برای هر عدد دلخواه $n \geq 1$ (یا هر مقدار اولیه دیگر) درست است.

❖ گام استقراء: اگر عبارت به‌ازای n درست باشد، آنگاه به‌ازای $n + 1$ نیز درست است.

مثال ۱-۶

برای کلیه اعداد صحیح نشان دهید که

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

پایه استقراء: برای $n = 1$ داریم:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

فرض استقراء: فرض کنید برای یک عدد صحیح مثبت دلخواه n داریم:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

گام استقراء: لازم است نشان دهیم که

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

بدین صورت که

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (n+1) &= 1 + 2 + \dots + n + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

با فرض استقراء و چند محاسبه جبری ساده به این نتیجه رسیدیم که

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

بنابراین اگر فرض برای n درست باشد آنگاه برای $n + 1$ نیز درست است.

مثال ۷-۱

برای $n \geq 4$ نشان دهید که

$$n! > 2^n$$

پایه استقراء: برای $n = 4$ داریم:

$$4! = 24 > 16 = 2^4$$

فرض استقراء: فرض کنید $n! > 2^n$ برای همه مقادیر $n = 4, 5, \dots$ برقرار باشد.

گام استقراء: لازم است نشان دهیم که $(n+1)! > 2^{n+1}$.

$$(n+1)! = n!(n+1)$$

با توجه به فرض استقراء $n! > 2^n$ پس

$$(n+1)! > 2^n (n+1)$$

از آنجایی که $n+1 > 2$ ، بنابراین

$$(n+1)! > 2^n 2$$

در نتیجه $(n+1)! > 2^{n+1}$.

اثبات با استفاده از برهان خلف روش قدرتمند دیگری است که اغلب زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که روش‌های دیگر با مشکل مواجه می‌شوند. فرض کنید می‌خواهیم درستی عبارت P را اثبات کنیم. در ابتدا فرض می‌کنیم که P نادرست است و همین فرض را دنبال می‌کنیم. اگر به نتیجه‌ای برسیم که بدانیم نادرست است، نتیجه می‌گیریم که فرض ابتدایی اشتباه بوده است و بنابراین P باید درست باشد.

مثال ۸-۱

عدد گویا عددی است که می‌تواند به عنوان نسبتی از دو عدد صحیح n و m بیان شود به طوری که n و m هیچ ضریب مشترکی نداشته باشند. نشان دهید که $\sqrt{2}$ گویا نیست.

براساس برهان خلف فرض می‌کنیم $\sqrt{2}$ عددی گویاست پس می‌توانیم آن را به صورت

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$