



بهینه سازی غیر خطی

مولفان : کلرک ، روس، ترلاکی

مترجمان:

دکتر حمیدرضا یوسفزاده دکتر نرجس سابقی

«عضو هیئت علمی دانشگاه ولایت»

«عضو هیئت علمی دانشگاه پیام نور»

«امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.»^۱

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برآیمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام(ص) این است که «بخوان!» و در اولین

۱. پیام مقام معظم رهبری به مناسبت آغاز هفته کتاب ۷۲/۱۰/۴

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشأن خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «إِقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

نه	پیشگفتار مترجمان
۱	فصل صفر: مقدمه
۱	۱-۰ مسئله بهینه‌سازی غیرخطی در حالت کلی
۴	۲-۰ تاریخچه کوتاهی از بهینه‌سازی غیرخطی
۸	۳-۰ برخی مثال‌های تاریخی
۸	۱-۳-۰ مسئله تارتاگلیا
۹	۲-۳-۰ مسئله کپلر
۹	۳-۳-۰ مسئله اشتاینر
۱۰	۴-۰ مثال‌های بهینه‌سازی درجه دو
۱۱	۱-۴-۰ مسئله مخلوط کردن بتن: برآورد کمترین مربعات
۱۲	۲-۴-۰ تجزیه و تحلیل سبد سهام (مدل‌های میانگین - واریانس)
۱۵	فصل اول: آنالیز محدب
۱۵	۱-۱ مجموعه‌های محدب و توابع محدب
۲۰	۲-۱ مطالب بیشتر درباره مجموعه‌های محدب
۲۰	۱-۲-۱ پوسته محدب و مجموعه‌های رأسی
۲۵	۲-۲-۱ مخروط‌های محدب
۳۲	۳-۲-۱ درون نسبی یک مجموعه محدب
۳۴	۳-۱ مطالب بیشتر پیرامون توابع محدب
۳۴	۱-۳-۱ ویژگی‌های اساسی توابع محدب
۳۹	۲-۳-۱ مشتقات توابع محدب
۴۵	فصل دوم: شرایط بهینگی
۴۵	۱-۲ شرایط بهینگی برای بهینه‌سازی نامقید

۵۲	۲-۲ شرایط بهینگی برای مسائل بهینه‌سازی مقید
۵۷	۱-۲-۲ تفسیر هندسی
۶۰	۲-۲-۲ شرط اسلاتر
۶۵	۳-۲-۲ لم فارکاس محدب
۷۳	۴-۲-۲ نظریه کاروش - کان - تاکر

۸۱	فصل سوم: دوگانی در بهینه‌سازی محدب
۸۲	۱-۳ دوگان لاگرانژ
۸۵	۲-۳ دوگان ولف
۹۰	۳-۳ مثال‌هایی از مسائل دوگان
۹۵	۴-۳ مثال‌هایی با شکاف دوگانی مثبت
۱۰۴	۵-۳ بهینه‌سازی نیمه معین
۱۰۸	۶-۳ دوگانی در بهینه‌سازی مخروط - خطی

۱۱۳	فصل چهارم: الگوریتم‌هایی برای بهینه‌سازی نامقید
۱۱۳	۱-۴ الگوریتم عمومی
۱۱۴	۲-۴ نرخ همگرایی
۱۱۵	۳-۴ جستجوی خطی
۱۱۶	۱-۳-۴ جستجوی دو حالت و برش طلایی
۱۱۹	۲-۳-۴ روش دوبخشی یا منصف
۱۲۰	۳-۳-۴ روش نیوتن
۱۲۳	۴-۴ روش گرادیان
۱۲۶	۵-۴ روش نیوتن
۱۲۹	۶-۴ روش‌های جهت‌های مزدوج
۱۳۱	۱-۶-۴ روش پاول
۱۳۵	۲-۶-۴ روش فلچر و ریوز
۱۳۸	۷-۴ روش‌های شبه نیوتن
۱۴۱	۱-۷-۴ بروز رسانی DFP
۱۴۵	۲-۷-۴ بروز رسانی BFGS
۱۴۷	۸-۴ معیار توقف

۱۴۹	فصل پنجم: الگوریتم‌هایی برای بهینه‌سازی مقید
۱۴۹	۱-۵ روش گرادیان تقلیل یافته
۱۵۹	۲-۵ تعمیم روش گرادیان تقلیل یافته (GRG)

۱۷۱	فصل ششم: رویکرد نقطه درونی برای بهینه‌سازی غیرخطی
۱۷۱	۱-۶ مقدمه

۱۷۳	۲-۶ دوگانی و مسیر مرکزی
۱۷۶	۱-۲-۶ توابع مانع لگاریتمی
۱۷۸	۲-۲-۶ یکنوایی در طول مسیرها
۱۷۹	۳-۶ روش مانع لگاریتمی برای حل مسئله (CPO)
۱۷۹	۱-۳-۶ مقدمه
۱۸۰	۲-۳-۶ گام نیوتن برای ϕ_B
۱۸۲	۳-۳-۶ معیار نزدیکی
۱۸۴	۴-۳-۶ خاصیت خودسازگاری
۱۹۱	۵-۳-۶ خواص روش نیوتن
۱۹۴	۶-۳-۶ الگوریتم مانع لگاریتمی با طول گام‌های نیوتن
۲۰۲	۷-۳-۶ الگوریتم مانع لگاریتمی با گام‌های نیوتن میرا
۲۱۱	۴-۶ * مطالب بیشتر در مورد خودسازگاری
۲۱۱	۱-۴-۶ مقدمه
۲۱۵	۲-۴-۶ برخی نامساوی‌های اساسی
۲۱۸	۳-۴-۶ همگرایی خطی روش نیوتن میرا
۲۲۰	۴-۴-۶ همگرایی درجه دو روش نیوتن
۲۲۵	۵-۴-۶ وجود کمینه کننده و ویژگی‌های آن
۲۳۰	۶-۴-۶ شیوه حل
۲۳۹	فصل هفتم: برخی مسائل خاص ساختاریافته
۲۳۹	۱-۷ مقدمه
۲۴۰	۲-۷ برخی قوانین ترکیبی برای توابع خودسازگار
۲۴۴	۳-۷ بهینه‌سازی آنتروپی (EO)
۲۴۹	۴-۷ بهینه‌سازی هندسی (GO)
۲۵۶	۵-۷ بهینه‌سازی l_p -نرم (NO)
۲۶۴	۶-۷ بهینه‌سازی نیمه معین (SDO)
۲۶۷	پیوست آ
۲۶۷	آ-۱ برخی از لم‌های اساسی
۲۷۰	آ-۲ اثبات قضیه ۳.۶ و ۴.۶.
۲۷۶	مراجع
۲۸۰	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۲۸۶	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۲۹۲	نمایه

تقدیم بہ

روح پاک استاد فریختہ:

دکتر حامد رضا طارقیان

پیشگفتار مترجمان

با توجه به رشد فزاینده استفاده از مفهوم بهینه‌سازی در علوم مختلف که تقریباً در اغلب شاخه‌های مهندسی، اقتصاد، مدیریت و سایر زمینه‌ها نقش‌آفرینی می‌کند، نقش این حوزه از دانش در عصر حاضر به گونه‌ای نمود پیدا کرده است که می‌توان مبحث بهینه‌سازی را به عنوان یکی از مبانی اصلی توسعه تمدن بشری برشمرد. به عبارت دیگر، می‌توان گفت که بسیاری از مسائل در علوم و مهندسی تحت قالب یک مسئله غیرخطی فرمول‌بندی می‌شوند و به علاوه در بسیاری از مسائل اقتصادی و علوم انسانی نیز با مدل‌های غیرخطی روبه‌رو هستیم. در حالت کلی، در مسائل بهینه‌سازی غیرخطی، تابع هدف، همه یا برخی از محدودیت‌ها به صورت غیرخطی ظاهر می‌شوند. هدف اصلی این کتاب، ارائه مفاهیم اساسی روش‌های بهینه‌سازی به صورت تئوری و عملی است. نکته حائز اهمیت در نگارش این کتاب، شیوه خوانش خودخوان در بیان مطالب تخصصی به منظور مطالعه شخصی محققین و دانشجویان در سطوح کارشناسی و کارشناسی ارشد در رشته‌های مهندسی و علوم ریاضی است که از سوی نویسندگان مدنظر قرار گرفته است. موضوعات این کتاب مشابه با مبحث کلی بهینه‌سازی که با رشته‌های مختلف تخصصی مرتبط است، برای محققین مختلف در گرایش‌های تحقیق در عملیات، آنالیز عددی، کنترل و بهینه‌سازی، تحلیل سیستم‌ها، برق و کلیه رشته‌هایی که به نوعی با مسائل بهینه‌سازی در ارتباط هستند، می‌تواند مفید و پرکاربرد باشد. نویسندگان این کتاب در ابتدا مفاهیم و اصول مقدماتی مورد نیاز و همچنین انواع

مسائل کاربردی جهت آشنایی بیشتر خواننده را ارائه کرده‌اند تا شرایط لازم برای بیان و درک بهتر مطالب تخصصی بیش از پیش مهیا شود.

با توجه به اینکه بیان دقیق مفاهیم اصلی در برخی از بخش‌ها، نیاز به آشنایی و دانستن مفاهیم پیشرفته مانند جبر خطی، جبر خطی عددی و یا آنالیز حقیقی دارند ولی ساختار این کتاب به گونه‌ای تهیه و تنظیم شده است تا با در نظر گرفتن این موضوع، در روند اصلی فهم و درک مطالب خللی وارد نشود و بدون وابستگی به میزان آشنایی با آن‌ها، مطالب پیشرفته و تخصصی‌تر به راحتی بیان و دنبال شوند. علی‌رغم سادگی این کتاب که در بیان مطالب رعایت شده است، هدف این کتاب ارائه روش‌ها و دیدگاه‌های شناخته شده و پرکاربرد در مباحث بهینه‌سازی است که به صورت گام به گام و با جزئیات مورد نیاز می‌باشد که این مهم با پرهیز از اطاله کلام، ساختار ارائه مطالب را به گونه‌ای فراهم کرده است که انگیزه و علاقه خواننده را در یادگیری مباحث پیشرفته افزایش می‌دهد. اهمیت این شیوه ساختاری را می‌توان از دو دیدگاه یعنی ایجاد یک بستر مناسب برای یادگیری بهتر مطالب و دیگری آشنایی با روش‌های مختلف و ارزیابی دقیق‌تر نتایج عملکردی هریک مورد توجه قرار داد.

مطالب ارائه شده در این کتاب می‌تواند به عنوان درس بهینه‌سازی غیرخطی در چهارچوب سرفصل‌های تبیین شده در وزارت علوم و همچنین مطالعه شخصی دانشجویان کارشناسی ارشد و یا به عنوان یک درس پیش‌نیاز در دوره دکتری تخصصی رشته‌های مهندسی و یا علوم ریاضی مورد استفاده قرار گیرد. بیان مثال‌ها و راه حل‌های دقیق برای هر مبحث و همچنین ارائه تمرین‌های هدف‌دار که در متن کتاب و پس از بیان هر مطلب تخصصی جدید آورده شده‌اند، بستر مناسب را برای یادگیری بهتر و درک عمیق‌تر موضوع فراهم می‌کند. لذا به خواننده اکیداً توصیه می‌شود که پیش از پرداختن به موضوع جدید، تمرین‌های مشخص شده در هر بخش را به صورت دقیق مورد بررسی قرار دهد تا فهم شخصی خویش از هدف اصلی ارائه مفاهیم مربوطه را مورد آزمون قرار دهد. برای مطالعه کتاب هرچند می‌توان در حالت کلی از مطالعه برخی مطالب در بخش‌ها جهت سرعت بخشیدن به یادگیری مطالب مورد نیاز، چشم‌پوشی کرد ولی توصیه می‌گردد که برای درک بهتر، مطالب به صورت پیوسته و با جزئیات مورد مطالعه قرار گیرد.

ساختار کلی این کتاب به صورت زیر سازماندهی شده است:

در فصل آغازین (که با **فصل صفر** نمایش داده شده است) مسئله بهینه‌سازی غیرخطی در حالت کلی تعریف و چند مسئله کاربردی که می‌تواند در قالب یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی مطرح شود اشاره می‌شود که در این راستا تاریخچه کوتاهی از این گونه مسائل نیز آورده شده است. در **فصل اول**، به مفاهیم اولیه و تعاریف مجموعه‌ها و توابع محدب و همچنین ویژگی‌های اساسی توابع محدب پرداخته می‌شود. شروط لازم و شروط کافی بهینگی برای مسائل بهینه‌سازی نامقید (بدون محدودیت) و سپس مقید (با محدودیت) در **فصل دوم** مورد مطالعه قرار می‌گیرد. شکل دوگانی مسائل بهینه‌سازی محدب مانند دوگان لاگرانژ و دوگان ولف موضوعات مورد بررسی در **فصل سوم** این کتاب می‌باشد. براساس مفاهیم ارائه شده در فصول قبل و آماده‌سازی بستر مناسب برای معرفی الگوریتم‌های مختلف، در **فصل چهارم** و **پنجم** به بیان و معرفی روش‌ها و الگوریتم‌های شناخته شده به ترتیب جهت حل عددی مسائل بهینه‌سازی نامقید و مقید پرداخته شده است. رویکرد شناخته شده نقطه درونی با شرح عملکرد روش مانع لگاریتمی در حل مسائل بهینه‌سازی محدب و همچنین بررسی همگرایی روش‌های مختلف در **فصل ششم** مورد مطالعه قرار گرفته است. در پایان در **فصل هفتم** برخی از مسائل ساختاریافته خاص به همراه قوانین ترکیبی نظیر، به صورت اجمالی اشاره شده‌اند.

سخن آخر، هرچند مترجمان در ترجمه حاضر، تمام سعی خود را جهت حفظ اصالت مطلب مبذول داشته‌اند، اما در عین حال ممکن است این اثر عاری از خطا و اشتباه نباشد. لذا از همه اساتید بزرگوار و دانشجویان عزیز استدعا دارند، نظرات و انتقادات سازنده خود را درخصوص این اثر به مترجمان منتقل نمایند.

حمیدرضا یوسف‌زاده - نرجس سابقی^۱

^۱. لازم به ذکر است سهم مترجمان در ترجمه اثر حاضر برابر بوده است

فصل صفر

مقدمه

هیچ چیز در دنیا اتفاق نمی افتد که معنی آن بیشینه یا کمینه کردن نباشد.
اوایلر (۱۷۸۳-۱۷۰۷)

۱-۰ مسئله بهینه سازی غیرخطی در حالت کلی

مسئله بهینه سازی غیرخطی^۱ (NLO) در حالت کلی می تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$\begin{aligned} (NLO) \quad & \inf \quad f(x) \\ \text{s.t.} \quad & h_i(x) = 0, i \in I = \{1, \dots, p\} \\ & g_j(x) \leq 0, j \in J = \{1, \dots, m\} \\ & x \in \mathcal{C}, \end{aligned} \tag{۱-۰}$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ و $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه مشخص است و $f, h_1, \dots, h_p, g_1, \dots, g_m$ روی $\mathcal{C}$ (یا روی یک مجموعه باز شامل $\mathcal{C}$)، تعریف شده اند. مجموعه

جواب‌های شدنی با $\mathcal{F}$ نشان داده خواهد شد. بنابراین،

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{C} : h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p, g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}.$$

در ادامه از اصطلاحات استاندارد زیر استفاده خواهیم کرد.

- تابع f تابع هدف^۱ (NLO) و $\mathcal{F}$ مجموعه شدنی^۲ (یا ناحیه شدنی) نامیده می‌شود.
- اگر $\mathcal{F} = \emptyset$ ، آنگاه می‌گوییم مسئله (NLO) نشدنی^۳ است.
- اگر f روی $\mathcal{F}$ از پایین کراندار نباشد، گوییم مسئله (NLO) بیکران^۴ (نامحدود) است.
- اگر اینفیمم (بزرگترین کران پایین) f روی $\mathcal{F}$ در نقطه‌ای مانند $\bar{x} \in \mathcal{F}$ اتفاق افتد آنگاه $\bar{x}$ را یک جواب بهینه^۵ (یا کمینه یا کمینه کننده) مسئله (NLO) می‌نامیم و $f(\bar{x})$ مقدار (هدف) بهینه مسئله (NLO) نامیده می‌شود.

مثال ۱.۰. به عنوان مثال، کمینه کردن تابع "humpback" را بررسی می‌کنیم (شکل ۱-۰ را ببینید). مسئله کمینه‌سازی

$$\min \quad x_1^2(4 - 2x_1x_2) + \frac{1}{3}x_1^3 + x_1x_2 + x_2^2(-4 + 4x_1^2),$$

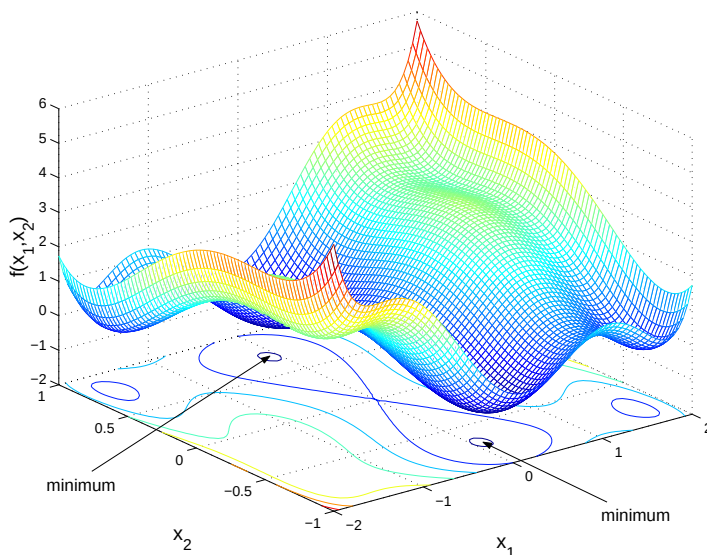
با توجه به محدودیت‌های $2 \geq x_1 \geq -2$ و $1 \geq x_2 \geq -1$ را در نظر بگیرید. توجه شود که مجموعه شدنی این مسئله، مستطیل

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2) : -2 \leq x_1 \leq 2, -1 \leq x_2 \leq 1\}$$

است.

این مسئله NLO دو جواب بهینه $(0.898, -0.717)$ و $(-0.898, 0.717)$ دارد که (کم و بیش) با نگاه کردن به منحنی‌های تراز تابع هدف در شکل ۱-۰ می‌توان آن را تایید کرد.

1. Objective function
2. Feasible set
3. Infeasible
4. Unbounded
5. Optimal solution



شکل ۱-۰: مثال مسئله بهینه‌سازی غیرخطی با تابع humpback به عنوان تابع هدف. ترازهای تابع هدف در شکل نشان داده شده‌اند.

نمادگذاری

ماتریس‌ها با حروف بزرگ $(A, B, P, \dots)$ ، بردارها با حروف لاتین کوچک و مؤلفه‌های هر بردار و هر ماتریس با حروف اندیس‌گذاری شده نشان داده خواهد شد (به عنوان مثال $z = (z_1, \dots, z_n)$ و $A = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$). به منظور ضرب ماتریس-بردار، بردارها در $\mathbb{R}^n$ همیشه به عنوان ماتریس‌های $n \times 1$ (بردارهای ستونی) در نظر گرفته می‌شوند. مجموعه اندیس‌ها با J و K نشان داده خواهند شد.

اکنون برخی از دسته مسائل NLO را معرفی می‌کنیم. به یاد دارید که $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ تابع درجه دو نامیده می‌شود، اگر یک ماتریس مربعی $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، بردار $c \in \mathbb{R}^n$ و یک عدد $\gamma \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشند به طوری که

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + \gamma \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

اگر $Q = 0$ آنگاه f آفین نامیده می‌شود و اگر $Q = 0$ و $\gamma = 0$ آنگاه f خطی نامیده می‌شود. گاهی اوقات با نسبت دادن توابع آفین به توابع خطی، این اصطلاحات را به درستی استفاده نمی‌کنیم.

طبقه‌بندی مسائل بهینه‌سازی غیرخطی

اکنون با در نظر گرفتن مسئله کلی ۱-۰، چند دسته مهم از مسائل بهینه‌سازی را به صورت فهرست‌وار بیان می‌کنیم.

بهینه‌سازی خطی^۱ (LO): توابع $f, h_1, \dots, h_p, g_1, \dots, g_m$ آفین هستند و مجموعه C یا با $\mathbb{R}^n$ و یا با زیرفضای نامنفی $\mathbb{R}_+^n$ برابر است. بهینه‌سازی خطی، اغلب برنامه‌ریزی خطی^۲ نامیده می‌شود. خواننده احتمالاً با الگوریتم سیمپلکس برای حل مسائل LO آشنا است. **بهینه‌سازی نامقید^۳:** مجموعه اندیس‌های I و J تهی هستند و $C = \mathbb{R}^n$.

بهینه‌سازی درجه دو^۴ (QO): تابع هدف f درجه دو است و همه توابع محدودیت $h_1, \dots, h_p$ و $g_1, \dots, g_m$ آفین و مجموعه C یا زیرفضای مثبت $\mathbb{R}_+^n$ از $\mathbb{R}^n$ است. **بهینه‌سازی مقید درجه دو^۵:** مانند مسئله QO است با این تفاوت که $g_1, \dots, g_m$ توابع درجه دو هستند.

۲-۰ تاریخچه کوتاهی از بهینه‌سازی غیرخطی

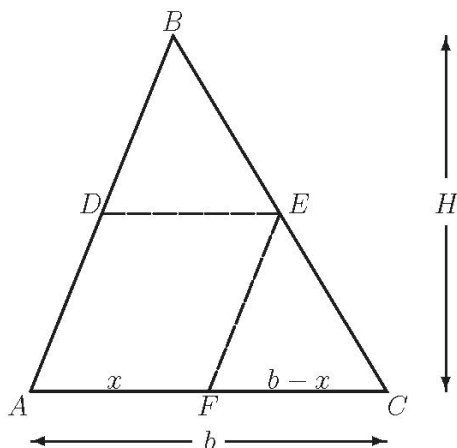
تا آنجا که می‌دانیم، کتاب عناصر اقلیدس^۶، اولین کتاب درسی ریاضی در تاریخ بشر (قرن چهارم قبل از میلاد) است. این کتاب شامل مسئله بهینه‌سازی زیر است.

در مثلث ABC ، متوازی‌الاضلاع $ADEF$ را طوری محاط کنید که $EF \parallel AB$ و $DE \parallel AC$ و مساحت این متوازی‌الاضلاع بیشینه باشد.

فرض کنید H ارتفاع مثلث و b طول ضلع AC را نشان دهد. هر متوازی‌الاضلاع محاط به شکل خواسته شده، به صورت منحصر بفرد با انتخاب یک راس F در فاصله $x < b$ از A روی ضلع AC مشخص می‌شود (شکل ۲-۰ را ببینید).

تمرین ۱.۰. نشان دهید که مسئله اقلیدس می‌تواند به صورت یک مسئله بهینه‌سازی درجه دو (QO) فرموله شود.

-
1. Linear optimization
 2. Linear programming
 3. Unconstrained optimization
 4. Quadratic optimization
 5. Quadratically constrained quadratic optimization
 6. Euclid's elements



شکل ۲-۵: نمایش مسئله اقلیدس

$$\max_{0 < x < b} \frac{Hx(b-x)}{b} \quad (2-5)$$

اقلیدس با استفاده از استدلال هندسی، توانست نشان دهد که مقدار بیشینه وقتی به دست می‌آید که $x = \frac{1}{2}b$ باشد. یک روش واحد برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی بایستی تا پیشرفت حسابان در قرن ۱۷م منتظر می‌ماند. در واقع در هر متن حسابان جدید، یاد می‌گیریم که برای حل مسائلی شبیه مسئله ۲-۵، با برابر صفر قرار دادن مشتق تابع هدف $f(x) = \frac{Hx(b-x)}{b}$ و حل معادله حاصل، $x = \frac{1}{2}b$ به دست می‌آید.

این روش جدید منسوب به فرما^۱ (۱۶۰۱-۱۶۶۵) است. به خاطر این روش، لاگرانژ^۲ (۱۷۳۶-۱۸۱۳) به وضوح اظهار داشت که فرما مخترع حسابان می‌باشد (برخلاف نیوتن^۳ (۱۶۴۳-۱۷۲۷) و لایبنیتز^۴ (۱۶۴۶-۱۷۱۶) که بعداً در یک مبارزه تلخ این افتخار را تصاحب کردند). خود لاگرانژ به خاطر بسط روش فرما برای حل مسائل بهینه‌سازی مقید (برابری) به وسیله ساخت یک تابع که اکنون به عنوان تابع لاگرانژی^۵

1. Fermat
2. Lagrange
3. Newton
4. Liebnitz
5. Lagrangian function

شناخته می‌شود و به کارگیری روش فرما روی لاگرانژی، شناخته شده است. به قول لاگرانژ می‌توان اصل کلی زیر را بیان کرد.

اگر کسی به دنبال بیشینه یا کمینه کردن توابعی با تعداد زیادی متغیر باشد تحت شرایطی که این متغیرها با یک محدودیت متشکل از یک یا تعداد بیش از یک معادله، در ارتباط هستند، آنگاه باید به تابعی که به دنبال اکسترمم آن هستیم، توابعی را که از معادلات محدودیت‌ها در ضرایبی نامعین ضرب شده اند، اضافه کرد و بیشینه یا کمینه مجموع حاصل را با مستقل فرض کردن متغیرها جستجو کرد. معادلات حاصل، همراه با معادلات محدودیت‌ها، برای تعیین همه مجهولات مورد استفاده قرار خواهند گرفت. برای درک بهتر منظور لاگرانژ، مسئله کلی NLO تنها با محدودیت‌های برابری $J = \phi$ و $C = \mathbb{R}^n$ در $0-1$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \inf \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & h_i(x) = 0, \quad i \in I = \{1, \dots, p\} \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

اکنون تابع لاگرانژی را تعریف می‌کنیم

$$L(x, y) := f(x) + \sum_{i=1}^p y_i h_i(x).$$

متغیرهای جدید y_i ضرایب لاگرانژ^۱ نامیده می‌شوند و ضرایب نامعینی هستند که لاگرانژ به آنها اشاره کرد. اکنون روش فرما را برای پیدا کردن کمینه تابع $L(x, y)$ ، با توجه به مستقل بودن متغیرهای x و y ، به کار می‌بریم. به عبارت دیگر، سیستم معادلات غیرخطی که با مساوی صفر قراردادن گرادیان L به دست می‌آید را با حفظ شرایط شدنی $h_i(x) = 0$ ($i \in I$)، حل می‌کنیم.

$$\nabla L(x, y) = 0, \quad h_i(x) = 0 \quad (i \in I), \quad (3-0)$$

اگر x^* یک جواب بهینه مسئله NLO باشد، آنگاه بردار $y^* \in \mathbb{R}^p$ وجود دارد به طوری که (x^*, y^*) یک جواب معادلات غیرخطی $3-0$ است. بنابراین می‌توان سیستم غیرخطی $3-0$ را حل کرد و قسمت x به دست آمده از یک جواب $3-0$ ، جواب بهینه

مسئله NLO را ارائه می‌دهد (به شرط وجود جواب). توجه شود که دانستن این موضوع از قبل که جواب بهینه مسئله NLO وجود دارد یا خیر، دشوار است.

این ما را به مسئله حل سیستم معادلات غیرخطی می‌کشاند. ایساک نیوتن، شهرت خود را شاید از شناخته شده‌ترین الگوریتم برای این مسئله دارد. همراه با روش‌های فرما و لاگرانژ، این یکی از اولین الگوریتم‌های بهینه‌سازی است. جالب است توجه کنید که حتی امروزه، الگوریتم بهینه‌سازی نیوتن پر پرکاربردترین الگوریتم برای بهینه‌سازی غیرخطی است. جدیدترین الگوریتم‌های بهینه‌سازی، یعنی الگوریتم‌های نقطه درونی، از این روش به عنوان "موتور" خود استفاده می‌کنند.

مطالعه بهینه‌سازی غیرخطی در زمان فرما، لاگرانژ، اویلر و نیوتن با این درک که بسیاری از اصول فیزیکی در طبیعت می‌تواند به وسیله اصول بهینه‌سازی (اکسترمم) بیان شوند، هدایت می‌شد. برای مثال اصل شناخته شده فرما برای انتشار نور می‌تواند چنین توضیح داده شود: در یک محیط غیر همگن، نور از یک نقطه به نقطه دیگر در طول مسیری حرکت می‌کند که نیاز به کمترین زمان دارد.

به طور مشابه، مشخص شد که بسیاری از مسائل در مکانیک (فلکی) می‌توانند به عنوان مسائل اکسترمم فرموله شوند.

مسئله تصمیم‌گیری در مورد این که آیا مسئله NLO جواب بهینه دارد یا خیر، را در نظر می‌گیریم. در قرن ۱۹ ام کارل وایرشراس^۱ (۱۸۹۷-۱۸۱۵) نتیجه مشهوری که برای بسیاری از دانشجویان آنالیز شناخته شده است، را اثبات کرد. این نتیجه بیان می‌کند که یک تابع پیوسته، اینفیمم و سوپریمم خود روی یک مجموعه فشرده اختیار می‌کند. این یک شرط کافی عملی برای وجود جواب‌های بهینه ارائه می‌دهد.

در دوران جدید، بهینه‌سازی غیرخطی در طراحی بهینه مهندسی، امور مالی، آمار و بسیاری زمینه‌های دیگر استفاده می‌شود. گفته شده است که ما در عصر بهینه‌سازی زندگی می‌کنیم، جایی که همه چیز باید بهتر و سریعتر از گذشته باشد. به عنوان نمونه، طراحی یک ماشین با کمترین مقاومت هوا، یک پل با کمترین وزن که همچنان مشخصه‌های اصلی را برآورده کند، یک سبد سهام با حداقل ریسک و برگشت سرمایه مورد انتظار بالا و یک فهرستی بی پایان از این گونه مسائل را می‌توان در زمینه بهینه‌سازی اشاره کرد. اگر بتوانید یک مدل ریاضی برای مسئله تصمیم‌گیری‌تان بسازید، آنگاه می‌توانید آن را بهینه کنید.

طرح کلی این درس

تاریخچه کوتاه بیان شده از بهینه‌سازی غیرخطی، که البته بخش بسیار کوچکی از تاریخچه کامل است، تنها برخی از مهمترین مباحث که در این کتاب بررسی می‌شوند را معرفی می‌کند. روش‌های فرما و لاگرانژ را در فصل‌های ۱ و ۲ مطالعه خواهیم کرد. در فصل ۳ نظریه دوگانی مبتنی بر روش لاگرانژ دنبال خواهد شد. سپس در فصل‌های باقی‌مانده توجه خود را به الگوریتم‌های بهینه‌سازی معطوف خواهیم کرد. ابتدا روش‌های کلاسیک مثل روش گرادیان (تقلیل یافته) و روش نیوتن (فصل ۴) را، قبل از کاربردهای جدید روش نیوتن در الگوریتم‌های نقطه درونی (فصل ۶)، مطالعه خواهیم کرد. سرانجام با یک فصل در مورد دسته‌های با ساختار خاص از مسائل بهینه‌سازی غیرخطی که می‌توانند به نحو مؤثری با الگوریتم‌های نقطه درونی حل شوند، به پایان می‌بریم.

در ادامه این فصل، چند نمونه از مثال‌های تاریخی و عملی آورده شده است که ایده‌هایی در زمینه بهینه‌سازی غیرخطی ارائه می‌دهند.

۳-۰ برخی مثال‌های تاریخی

مثال‌های تاریخی از مسائل بهینه‌سازی غیرخطی که در این بخش ارائه می‌شود، از کتاب شگفت‌انگیز "*Stories about Maxima and Minima*" اثر تیخومیروف^۱ (۱۹۹۰)، AMS)، گرفته شده است. برای پیشینه و جزئیات بیشتر، خواننده می‌تواند به این کتاب مراجعه کند. در اینجا فقط صورت مسائل را بیان می‌کنیم. راه‌حل‌ها در این کتاب، وقتی خواننده شرایط بهینگی را مطالعه کرد، در قالب تمرین ارائه خواهد شد. البته، ابزارهای ریاضی که به کار برده می‌شوند، در دسترس مبتکران این مسائل نبوده است. برای مطالعه راه‌حل‌های تاریخی اصلی (ابتکاری) مجدداً خواننده را به کتاب تیخومیروف ارجاع می‌دهیم.

۳-۰-۱ مسئله تارتاگلیا

نیکولو تارتاگلیا^۲ (۱۵۵۷-۱۵۰۰)، مسئله زیر را مطرح کرد:

1. V.M. Tikhomirov

2. Niccolo Tartaglia

چطور عدد ۸ را به دو بخش می توان تقسیم کرد به طوری که نتیجه حاصل ضرب دو بخش حاصل در تفاضل شان بیشینه شود؟ اگر دو بخش مجهول را با x_1 و x_2 نشان دهیم، می توان این مسئله را به صورت مسئله بهینه سازی غیرخطی زیر بیان کرد.

$$\max x_1 x_2 (x_1 - x_2) \quad (4-0)$$

به طوری که محدودیت های زیر برقرار باشد

$$x_1 + x_2 = 8, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

تارتاگلیا می دانست که جواب درست $x_1 = 4 + (\frac{4}{\sqrt{3}})$ و $x_2 = 4 - (\frac{4}{\sqrt{3}})$ است. چطور می توان ثابت کرد این جواب درست است؟ (راه حل در تمرین ۴.۲ داده شده است).

۰-۳-۲ مسئله کپلر

منجم مشهور، یوهانس کپلر^۱، آنقدر با هندسه ظرف استوانه ای شکل شراب فریب خورده بود که در سال ۱۶۱۵ کتابی درباره آن نوشت: "*New solid geometry of wine barrels*". در این کار او مسئله زیر را (در کنار بقیه مسائل) بررسی کرد: داخل یک کره، یک استوانه با بیشترین حجم محاط کنید.

کپلر می دانست که استوانه با بیشترین حجم، استوانه ای است که نسبت قطر قاعده آن به ارتفاع $\sqrt{2}$ است (و البته طول قطر^۲ استوانه برابر قطر کره است). چطور می توان درستی این جواب را نشان داد؟ (تمرین های ۲.۰ و ۲.۱ ملاحظه شوند).

تمرین ۲.۰. مسئله کپلر را به صورت یک مسئله بهینه سازی غیرخطی فرموله کنید.

۰-۳-۳ مسئله اشتاینر^۳

در صفحه یک مثلث داده شده، نقطه ای را پیدا کنید که مجموع فواصل آن از رئوس مثلث کمینه باشد.

1. Johannes Kepler
2. Diagonal
3. Steiner's problem