



دانشگاه سامان نور

تحقیق در عملیات ۱

محمد گلمکانی

«امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.»^۱

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برآیمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام(ص) این است که «بخوان!» و در اولین

۱. پیام مقام معظم رهبری به مناسبت آغاز هفته کتاب ۷۲/۱۰/۴

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشأن خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «إِقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

پیشگفتار	نُه
مقدمه	یازده
فصل اول. مفاهیم کلی برنامه‌ریزی خطی، مدل‌سازی	۱
هدف کلی	۱
هدف‌های یادگیری	۱
۱-۱ مدل‌سازی	۱
۱-۱-۱ طبقه‌بندی مدل‌ها	۲
۱-۱-۱-۱ مدل‌سازی و برنامه‌ریزی خطی	۲
۱-۱-۱-۲ چهار فرض اصلی برنامه‌ریزی خطی	۹
۱-۱-۱-۳ شکل متعارفی و استاندارد مدل برنامه‌ریزی خطی	۲۵
۱-۱-۱-۴ روش‌های تبدیل مدل‌های L.P غیراستاندارد به شکل استاندارد	۲۶
۱-۳-۱ تبدیل تابع هدف Min به Max و بالعکس	۲۷
۲-۳-۱ تبدیل محدودیت نامساوی به مساوی	۲۷
۳-۳-۱ تبدیل محدودیت مساوی به نامساوی	۲۸
۴-۳-۱ حذف قدرمطلق در محدودیت‌ها	۲۸
۵-۳-۱ تغییر جهت محدودیت‌ها	۲۸
۶-۳-۱ نامنفی کردن متغیرهای منفی	۲۸
۷-۳-۱ مقید کردن متغیرهای نامقید (آزاد در علامت)	۲۹
۸-۳-۱ تبدیل متغیرهای کران‌دار	۲۹
۹-۳-۱ حذف قدرمطلق از متغیر	۳۰
۱۰-۳-۱ تبدیل تابع هدف مرکب	۳۱
۱۱-۳-۱ تبدیل قدرمطلق در تابع هدف $ g(x) $ Min(Or Max)	۳۲

۳۳	خلاصه فصل اول
۳۳	صرفاً جهت مطالعه
۳۳	معرفی انواع مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی
۳۵	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل اول
۴۲	خودآزمایی تشریحی فصل اول
۴۷	فصل دوم. حل مسائل برنامه‌ریزی خطی
۴۷	هدف کلی
۴۷	هدف‌های یادگیری
۴۷	۱-۲ روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی خطی
۴۹	۲-۲ تعاریف مقدماتی
۵۰	۳-۲ حل ترسیمی مسئله برنامه‌ریزی خطی
۵۱	۳-۲-۱ گام‌های حل ترسیمی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی
۶۰	۳-۲-۲ انواع محدودیت
۶۱	۳-۳-۲ حالات مختلف ناحیه وجه
۶۵	۳-۳-۴ حالات مختلف جواب بهینه مدل برنامه‌ریزی خطی
۶۸	۴-۲ مجموعه (فضای) محدب
۷۵	۵-۲ حل مسائل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس
۷۶	۵-۲-۱ شکل استاندارد مدل برنامه‌ریزی خطی
۷۸	۵-۲-۲ دستگاه معادلات خطی و روش حذفی گوس - جردن
۸۱	۵-۲-۳ مبانی روش سیمپلکس
۸۱	۵-۲-۳-۱ رویه جبری حل یک مسئله
۸۹	۵-۲-۳-۲ روش سیمپلکس
۱۰۸	۶-۲ چند نکته کاربردی در جدول سیمپلکس
۱۱۲	۷-۲ روش سیمپلکس برای حل مسائل نامتعرف
۱۱۳	۷-۲-۱ مسائل دارای متغیرهای منفی یا آزاد در علامت
۱۱۴	۷-۲-۲ مسائل دارای تابع هدف حداقل‌سازی
۱۱۷	خلاصه فصل دوم
۱۱۷	صرفاً جهت مطالعه
۱۲۵	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل دوم
۱۳۱	خودآزمایی تشریحی فصل دوم
۱۳۷	فصل سوم. حل مسئله برنامه‌ریزی خطی با استفاده از متغیرهای مصنوعی
۱۳۷	هدف کلی
۱۳۷	هدف‌های یادگیری
۱۳۷	۱-۳ روش متغیرهای مصنوعی

۱۴۱	۳-۱-۱-۱ روش M-بزرگ
۱۴۸	۳-۱-۲ روش دومرحله‌ای
۱۶۱	۳-۱-۳ مقایسه جدول‌های روش M-بزرگ و روش دومرحله‌ای
۱۶۴	۳-۱-۴ حالت خاص در روش متغیرهای مصنوعی
۱۶۸	۳-۲ حالات خاص در جدول سیمپلکس
۱۶۹	۳-۲-۱ تبه‌گن (تباهیدگی یا انحطاط یا دژنره)
۱۷۳	۳-۲-۱-۱ پدیده سیکل
۱۷۵	۳-۲-۲ جواب بهینه چندگانه
۱۷۹	۳-۲-۳ عدم وجود جواب یا منطقه موجه قابل قبول
۱۸۱	۳-۲-۴ فضا بیکران - مقدار تابع هدف بیکران
۱۸۴	۳-۲-۵ فضا بیکران، مقدار تابع هدف کراندار
۱۸۶	خلاصه فصل سوم
۱۸۶	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل سوم
۱۹۹	خودآزمایی تشریحی فصل سوم
۲۰۵	فصل چهارم. تفسیر اقتصادی جدول‌های سیمپلکس و مسئله دوگان
۲۰۵	هدف کلی
۲۰۵	هدف‌های یادگیری
۲۰۵	۴-۱ تفسیر اقتصادی جدول‌های سیمپلکس
۲۰۹	۴-۲ مسئله دوگان
۲۱۱	۴-۲-۱ تفسیر اقتصادی متغیرهای دوگان
۲۱۳	۴-۲-۲ نوشتن مسئله دوگان با استفاده از تعبیر اقتصادی
۲۱۵	۴-۲-۳ نوشتن مسئله دوگان با استفاده از تعریف
۲۱۸	۴-۲-۴ نوشتن دوگان مسائل به شکل غیرمتعارفی
۲۲۲	۴-۲-۵ ارائه یک روش ساده برای نوشتن مسئله دوگان
۲۲۶	۴-۳ قضایا و روابط بین دو مسئله اولیه و دوگان
۲۳۶	۴-۴ روش سیمپلکس دوگان
۲۴۴	۴-۴-۱ مقایسه دو روش سیمپلکس معمولی و سیمپلکس دوگان
۲۴۵	۴-۴-۲ حالت خاص روش سیمپلکس دوگان - روش محدودیت مصنوعی
۲۴۸	خلاصه فصل چهارم
۲۴۹	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل چهارم
۲۵۸	خودآزمایی تشریحی فصل چهارم
۲۶۵	فصل پنجم. تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی پارامتری
۲۶۵	هدف کلی
۲۶۵	هدف‌های یادگیری

۲۶۵	۱-۵ مفهوم تجزیه و تحلیل حساسیت
۲۶۷	۲-۵ خواص جدول سیمپلکس
۲۷۳	۳-۵ تحلیل حساسیت
۲۹۷	۴-۵ برنامه‌ریزی پارامتری
۳۰۲	خلاصه فصل پنجم
۳۰۳	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل پنجم
۳۱۴	خودآزمایی تشریحی فصل پنجم
۳۲۱	فصل ششم. مسائل حمل‌ونقل و تخصیص
۳۲۱	هدف کلی
۳۲۱	هدف‌های یادگیری
۳۲۱	۱-۶ کلیات
۳۲۷	۲-۶ روش‌های حل مدل حمل‌ونقل
۳۲۹	۱-۲-۶ روش‌های به‌دست آوردن یک جواب موجه ابتدایی
۳۲۹	۱-۱-۲-۶ روش گوشه شمال غربی
۳۳۲	۲-۱-۲-۶ روش حداقل هزینه سطر
۳۳۶	۳-۱-۲-۶ روش حداقل هزینه ستون
۳۳۶	۴-۱-۲-۶ روش حداقل هزینه
۳۳۸	۵-۱-۲-۶ روش تخمین وُگل
۳۴۳	۶-۱-۲-۶ روش راسل
۳۴۶	۲-۲-۶ روش‌های بهبود جواب و یافتن جواب بهینه
۳۴۷	۱-۲-۲-۶ روش پله‌سنگی
۳۵۶	۲-۲-۲-۶ روش مضارب یا روش MODI
۳۶۷	۳-۶ حداکثرسازی در مسائل حمل‌ونقل
۳۶۸	۴-۶ حالت‌های خاص در حمل‌ونقل
۳۷۱	۵-۶ تحلیل حساسیت در مدل حمل‌ونقل
۳۸۱	۶-۶ مدل تخصیص
۳۸۳	۱-۶-۶ نمایش و معرفی مسئله تخصیص
۳۸۵	۲-۶-۶ روش‌های حل مسئله تخصیص
۳۹۳	۳-۶-۶ حالت‌های خاص در مدل تخصیص
۴۰۲	خلاصه فصل ششم
۴۰۲	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل ششم
۴۱۲	خودآزمایی تشریحی فصل ششم
۴۱۷	پاسخنامه
۴۱۹	منابع

پیشگفتار

برخی از کشورهای جهان سوم با وجود داشتن منابع مالی و استراتژیک بسیار مناسب، همچنان نامشان در زمره کشورهای عقب افتاده و کم بضاعت خودنمایی می کند. اکنون ثابت شده است که دلیل اصلی این عقب افتادگی همانا فقر مدیریت علمی است. مدیریت فرایندی است که با تکیه بر اطلاعات و آمار صحیح و نیز بررسی و استنباط از این اطلاعات صورت می گیرد. یکی از مهم ترین وظایف یک مدیر، تصمیم گیری است. بدیهی است که تصمیماتی که مبتنی بر ریاضیات باشد، بیشترین موفقیت را به همراه خواهد داشت. با استفاده از روش های ریاضی و علوم مهندسی در بسیاری از مسائل مدنظر مدیریت، می توان بهترین تصمیم ممکن را اخذ کرد. مسائلی مانند تعیین میزان تولید هر خط برای کسب حداکثر سود کارخانه، تخمین میزان خسارت پرداختی شرکت بیمه، تعیین حداکثر باری که یک پُل یا ساختمان تحمل خواهد کرد، محاسبه مدار سیاره ها، حداقل هزینه حمل کالا، تخمین تعداد پرستار مورد نیاز بیمارستان در هر شیفت و غیره. یکی از روش های ریاضی که کاربرد وسیعی در حل مسائل مختلف نظیر آنچه که بیان شد را داراست، تحقیق در عملیات است. با بهره گیری از تکنیک برنامه ریزی خطی که خود یکی از روش های تحقیق در عملیات است، مسائل فراوانی را با تجزیه و تحلیل نقطه سربه سر، مدل های حمل و نقل، مدل های موجودی انبار و ... می توان حل کرد. کتاب حاضر به پیشنهاد گروه مهندسی صنایع دانشگاه پیام نور تهیه شده و در تهیه آن تلاش شده است که مفاهیم و فنون تحقیق در عملیات با زبان ساده و با استفاده از

مثال‌های متعدد به‌گونه‌ای بیان شوند که دانشجو بتواند به‌صورت خودخوان تا حد زیادی این مفاهیم را درک کند.

امید است مدرسین و دانشجویان عزیز با رهنمودهای خود بر اثرگذاری هرچه بیشتر این کتاب بیفزایند.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم این کار کوچک را به جناب استاد دکتر حسین تقی‌زاده کاخکی تقدیم کنم که با آموزش‌های درسی و اخلاقی خود از اولین جلسه درس تحقیق در عملیات ۱ در دانشگاه فردوسی (۱۳۷۹) تا همیشه مرا وامدار علم، مهر و معرفت خود کرده است و امیدوارم کاستی‌های این نوشتار را با بزرگی خود بر این همیشه شاگرد خویش ببخشد.

محمد گل‌مکانی

M.golmakani77@gmail.com

مقدمه

در جهان امروز با افزایش تخصص و گسترش پیچیدگی سازمان‌ها، ارزش یک مدیر غالباً با تصمیماتی که در زمینه تخصیص منابع محدود موجود بین فعالیت‌های مختلف سازمان (برای دستیابی به حداکثر کارایی) اتخاذ می‌کند، سنجیده می‌شود. مدیران باید با دانش تصمیم‌گیری آشنا شوند و تحقیق در عملیات حوزه جدیدی در تصمیم‌گیری به‌شمار می‌رود. اولین استفاده سازمان یافته از تحقیق در عملیات در جنگ جهانی دوم و سال ۱۹۴۱ در انگلستان بود که در آن برهه زمانی مدیریت نظامی انگلیس به دلیل محدودیت شدید بودجه و ادوات نظامی و همچنین عدم آشنایی ارتش با استفاده بهینه از رادار که اختراع جدید دانشمندان انگلیسی بود، گروهی از دانشمندان را که با مسائل تاکتیکی و استراتژیک در رابطه با دفاع هوایی و زمینی تخصص داشتند، مأمور تحقیقاتی در این زمینه نمود تا چگونگی استفاده مناسب و حداکثر از منابع نظامی را مورد بررسی و مطالعه قرار دهند. نتیجه هم‌فکری دانشمندان و به‌کارگیری تکنیک‌های مؤثر ریاضی و داده‌های اطلاعاتی، باعث شد تا توان دفاعی انگلستان تا حدود ۱۰ برابر افزایش یابد.

نتایج ارزشمند حاصل از به‌کارگیری تحقیق در عملیات توسط تیم انگلیسی، به سرعت مدیریت نظامی ایالات متحده را به فعالیت‌هایی در این زمینه ترغیب کرد. نوآوری‌های موفقیت‌آمیزی توسط تیم‌های آمریکایی به دست آمد که توسعه الگوهای جدید پرواز، برنامه‌ریزی در مین‌گذاری دریا، بهره‌برداری مؤثر از تجهیزات الکترونیکی

از آن جمله بودند. در این رابطه گروه‌های مشابهی در دیگر کشورها از جمله کانادا و فرانسه نیز به فعالیت مشغول شدند. این گروه‌ها که معمولاً برای اجرای بهتر عملیات تعیین می‌شدند، در انگلستان به نام تحقیق در عملیات شناخته شده و نیز گاهی در آمریکا با نام‌های دیگری نظیر تحلیل عملیات، ارزیابی عملیات، تحقیق در عملیات، تحلیل سیستم‌ها، ارزیابی سیستم‌ها و تحقیق در سیستم‌ها به کار گرفته می‌شدند.

از نمونه بررسی‌های دانشمندان تحقیق در عملیات در طول جنگ جهانی دوم، بررسی نحوه حمله هواپیماهای نیروی هوایی انگلستان به زیردریایی‌های آلمانی بود.

در اوایل جنگ، نیروی هوایی انگلستان از بمب‌های معمولی علیه زیردریایی‌های آلمانی استفاده می‌کرد. در این نوع حمله، وقتی انفجار در سطح آب رخ می‌داد، نمی‌توانست به بدنه زیردریایی‌ها آسیب بزند مگر اینکه بمب به عرشه اصابت می‌کرد؛ بنابراین برای تخریب بیشتر زیردریایی‌هایی که به زیر آب فرو رفته بودند انفجار در عمق مورد استفاده هواپیما قرار می‌گرفت. ولی برای تعیین عمق مناسب انفجار، اختلاف نظر وجود داشت. بعضی اسکادران‌ها بمب‌های خود را برای انفجار در عمق ۱۵۰ فوتی تنظیم می‌کردند، چون فکر می‌کردند این مقدار، حداکثر عمقی است که زیردریایی مورد حمله ممکن است فرو برود، اما اسکادران‌های دیگر ۵۰ فوت را برای تنظیم انتخاب کردند با این دلیل که زیردریایی‌ها در عمق ۱۵۰ فوت دیگر دیده نمی‌شوند و در نتیجه مورد حمله قرار نمی‌گیرند. لذا بین گروه طرفداران تنظیم عمق و سطح انفجار اختلاف نظر وجود داشت. به هر حال مسئله حمله هواپیماها به زیردریایی‌های آلمانی از مواردی بود که دانشمندان ریاضی بسیار به آن علاقه‌مند شده و به بررسی آن پرداختند.

پس از جنگ جهانی دوم حوزه تحقیق در عملیات چنان پیشرفت کرده است که اکنون از بخش‌های جداناپذیر تصمیم‌گیری در علوم مختلف است. همان‌طور که بیان شد، تحقیق در عملیات شامل مباحث ریاضی بوده و کاربرد ریاضی را در مسائل تصمیم‌گیری مطرح می‌کند. با توجه به محدود بودن منابع در دنیای واقعی، هدف اصلی تحقیق در عملیات در حالت کلی آشنا کردن مدیران با روش‌های بهینه‌سازی^۱ است.

تاکنون کتاب‌های زیادی در زمینه تحقیق در عملیات (۱) به چاپ رسیده است و در این کتاب تلاش گردیده که با مطالعه کتب معتبر موجود، یک مشکل عمده آن‌ها یعنی آموزش ساده مباحث ریاضی تحقیق در عملیات که هم پایه و اساس آن بوده و هم فهم آن‌ها برای دانشجویان علاقه‌مند به کار در این زمینه و نیز حتی برای افراد متقاضی شرکت در کنکور ارشد و دکتری ضرورت دارد، تا حد امکان رفع شود.

فصل اول

مفاهیم کلی برنامه‌ریزی خطی، مدل‌سازی

هدف کلی

هدف‌های کلی این فصل، آشنایی دانشجویان با تعریف و تاریخچه تحقیق در عملیات^۱ و همچنین معنی و مفهوم مسائل برنامه‌ریزی خطی^۲ است.

هدف‌های یادگیری

- دانشجو پس از مطالعه این فصل می‌تواند:
۱. زمینه پیدایش تحقیق در عملیات را خواهد فهمید.
 ۲. شیوه نگاه درست به یک مسئله را خواهد فهمید.
 ۳. خواهد توانست یک مسئله تصمیم‌گیری را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی بنویسد.
 ۴. ساختار یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به خصوص تابع هدف، محدودیت‌ها و متغیرهای تصمیم را توضیح دهد.

۱-۱ مدل‌سازی

تحقیق در عملیات عبارت است از یک روش علمی برای شناسایی و حل مسائل مدیریتی که هدف اصلی آن کمک به مدیران در جهت تصمیم‌گیری بهتر است. تحقیق

در عملیات بر مجموعه‌ای از تکنیک‌های ریاضی تأکید دارد که یا در حوزه علم مدیریت و تصمیم‌گیری توسعه یافته‌اند و یا از سایر علوم مانند ریاضی، آمار و احتمالات، اقتصاد، علوم طبیعی و مهندسی اقتباس شده‌اند.

مشکلات سازمان و پیچیدگی مسائل اجتماعی به‌گونه‌ای است که اجرای تجربه‌های علمی در محیط سازمان مشکل بوده و گاهی نیز غیرممکن است. در نتیجه در تحقیق در عملیات برای اجرای تجربه‌های علمی از مدل استفاده می‌شود.

هر مدل یک نمایش انتخابی از واقعیت است. با تعریف یک مدل مناسب، به راحتی می‌توان با استفاده از راه‌حل‌های مختلف، نتایجی گوناگونی را مورد تحلیل و بررسی قرار داد؛ به عبارت دیگر به کمک یک مدل می‌توان بهترین تصمیم‌گیری را داشت بدون آنکه این تصمیم همانند دنیای واقعی دارای مخاطره و ریسک باشد.

۱-۱-۱ طبقه‌بندی مدل‌ها

همواره برای بررسی و بهینه‌سازی یک مسئله واقعی ابتدا باید یک مدل کوچک‌تری از آن تهیه کرد. به‌طور کلی مدل‌ها را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد:

۱. **مدل‌های شمایی (فیزیکی):**^۱ که به‌طور کلی شبیه شیء واقعی‌اند؛ مانند عکس‌ها، نقاشی‌ها، ماکت‌ها و ...

۲. **مدل‌های قیاسی (تصویری):**^۲ که همان مدل واقعی بوده اما در مقیاسی بسیار کوچک‌تر مثل فلوجارت‌های کامپیوتری، نمودارهای کنترل پروژه و یا نمودار فرایند تولید.

۳. **مدل‌های سمبولیک (ریاضی):**^۳ که از حروف، اعداد و نمادها برای نشان دادن متغیرها و ارتباط بین آن‌ها استفاده می‌شود. این مدل‌ها معمولاً بیشترین انعطاف‌پذیری و قابلیت دست‌کاری شدن را داشته و در نتیجه پرکاربردترین دسته مدل‌ها می‌باشند.

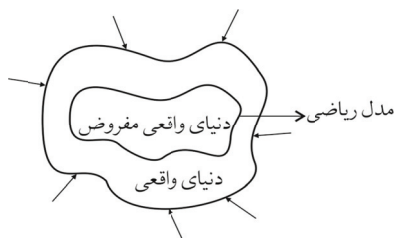
۱-۲ مدل‌سازی و برنامه‌ریزی خطی

یک سیستم تولیدی، خدماتی، اقتصادی و ... را در دنیای واقعی در نظر بگیرید.

همان‌طور که بیان شد پیچیدگی و ناآرام بودن محیط یک سازمان باعث شده که مدیران نتوانند به آسانی تصمیم‌گیری کنند. مدیران هر سازمان برای رسیدن به یک هدف مشخص، با محدودیت‌های زیادی همچون محدودیت منابع اولیه، انرژی، نیروی انسانی، بودجه و غیره مواجه هستند. هدف بسیاری از مدیران حداکثر کردن سود بیشتر و یا حداقل کردن هزینه، ضایعات و غیره است.

بنابراین همان‌گونه که گفته شد، هدف تحقیق در عملیات، تبدیل سیستم واقعی مورد بحث به یک مدل ریاضی و اخذ بهترین تصمیم است. بیان واقعیت توسط یک مدل ریاضی کاری بسیار سخت و دشوار است. زیرا در یک سیستم واقعی پارامترهای متعدد کیفی و کمی بر واقعیت مورد بحث تأثیر می‌گذارند. بسیاری از پارامترهای کیفی را می‌توان به کمی تبدیل و در مدل مورد استفاده قرار داد اما تبدیل کلیه پارامترهای کیفی به کمی امکان‌پذیر نیست.

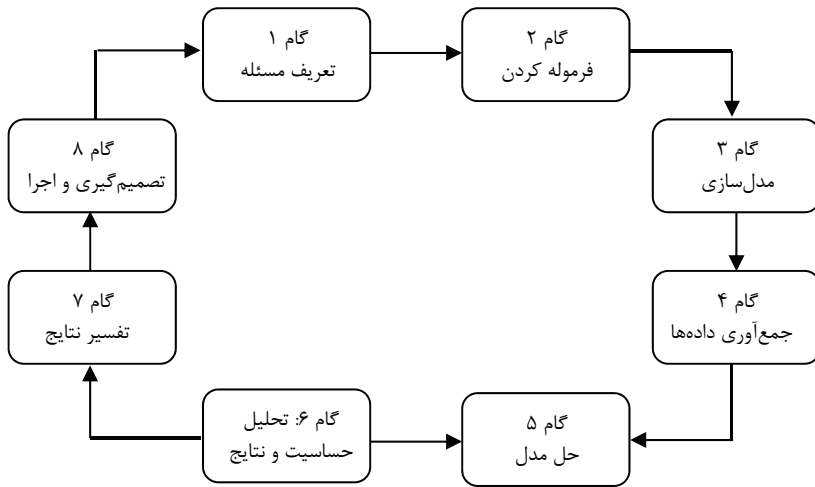
همان‌طور که در علم ریاضی و برخی علوم دیگر، مفروضاتی مطرح و سپس اقدام به اثبات و نتیجه‌گیری می‌شود، در سیستم واقعی مورد بحث هم فرضیاتی مطرح و سپس به ساخت مدل ریاضی آن اقدام می‌شود. بنابراین مدل ریاضی از یک سیستم واقعی مفروض ساخته می‌شود شکل زیر این موضوع را نشان می‌دهد:



محدودیت‌های موجود در دنیای واقعی

شکل ۱-۱

بر طبق تقسیم‌بندی گرین، فرایند حل مسائل تحقیق در عملیات در ۸ گام به صورت زیر انجام می‌پذیرد که گام‌های ۱ و ۲ به فعالیت‌های قبل از مدل‌سازی، گام‌های ۳ تا ۶ به فعالیت‌های حین مدل‌سازی و گام‌های ۷ و ۸ به فعالیت‌های بعد از مرحله مدل‌سازی طبقه‌بندی شده‌اند:



شکل ۱-۲. مدل گرین برای حل مسائل تحقیق در عملیات

در بین ۸ گامی که در شکل بالا مشاهده می شود، مدل سازی مهم ترین و اساسی ترین مرحله حل است که به اطلاعات زیادی نیز نیاز دارد. اگر مدل سازی درست صورت بگیرد، راه حل درست نیز از آن حاصل می شود.

در هر صورت، مدل سازی چالش برانگیزترین مبحث در برنامه ریزی ریاضی است زیرا رویکرد مدل سازی تأثیر مستقیمی بر روی مراحل بعدی از جمله زمان حل مسئله دارد. باید توجه داشت که مدل سازی علاوه بر دانش فرد در مورد تکنیک های مدل سازی و روش های حل، به تجربه و هنر فرد نیز بستگی دارد.

بدیهی است که هر شرکت تولیدی یا خدماتی سه وظیفه اساسی دارد که عبارت اند از وظیفه تأمین منابع مالی، تولید و فروش محصول یا خدمات خود. یکی از قوی ترین تکنیک هایی که در حل مسائل مربوط به این سه وظیفه به ویژه در حل مسائل خط تولید کمک شایانی به مدیران کرده است، تکنیک برنامه ریزی خطی است. در به کارگیری برنامه ریزی خطی برای حل یک مسئله، در عمل سه گام اساسی زیر باید در نظر گرفته شود:

اول، مسئله باید به گونه ای تعریف شود که بتوان آن را با استفاده از برنامه ریزی خطی حل کرد.

دوم، مسئله به صورت یک مدل ریاضی خطی فرموله شود.

سوم، مسئله قابلیت حل با یک روش مشخص ریاضی را داشته باشد.

در ادامه این فصل ابتدا نحوه مدل‌سازی مسائل، مورد بررسی قرار گرفته و سپس مثال‌هایی برای فهم بهتر مدل‌سازی ارائه می‌شود.

همان‌طور که مدل‌های مورد بحث در علم مدیریت از سه جزء عوامل قابل کنترل، عوامل غیرقابل کنترل و متغیرهای وابسته (نتیجه) تشکیل می‌شوند، هر مدل برنامه‌ریزی خطی نیز دارای همان سه جزء و با نام‌های متغیرهای تصمیم، محدودیت‌ها و تابع هدف است. در ادامه، این سه جزء به‌طور کامل تعریف و بررسی می‌شوند.

چارچوب کلی مدل برنامه‌ریزی خطی. به‌طورکلی هر مدل برنامه‌ریزی خطی از ۳ قسمت اساسی زیر تشکیل شده است:

۱. **متغیرهای تصمیم^۱ (x_j).** همان متغیرهای مستقل مدل هستند که مجهول بوده و نشان‌دهنده سطح یک فعالیت یا خدمت می‌باشند و مقادیر آن‌ها با حل مسئله و از روی جواب نهایی تعیین می‌شود.

این متغیرها یا فقط مقادیر مثبت ($x_j \geq 0$)، یا فقط مقادیر منفی ($x_j \leq 0$) و یا مقادیر آزاد در علامت (مثبت یا منفی) اختیار می‌کنند که به ترتیب تعداد تولید یک محصول، درجه هوای سردخانه و مکان استقرار یک تسهیل، مثال‌هایی برای هر حالت می‌باشند.

۲. **تابع هدف^۲ (Z).** هر سیستمی که مورد بررسی قرار می‌گیرد، هدف‌های متعددی را دنبال می‌کند که مهم‌ترین آن‌ها به‌عنوان هدف اصلی سیستم در نظر گرفته می‌شود. از آنجا که در برنامه‌ریزی خطی این هدف به‌صورت یک تابع ریاضی از متغیرهای تصمیم نوشته می‌شود، به آن تابع هدف می‌گوییم. هدف از حل مدل برنامه‌ریزی خطی، حداکثر کردن و یا به حداقل رساندن این تابع هدف است:

$$\text{Max (or Min) } Z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

۳. **محدودیت‌ها یا قیدها^۳.** بیانگر محدودیت استفاده از منابع در دسترس و یا محدودیت‌های تقاضا بوده و به یکی از حالت‌های $\leq$ یا $\geq$ و یا = مورد استفاده قرار می‌گیرند. محدودیت‌های حداکثر بودجه موجود، حداقل تقاضای خریدار و

میزان دقیق موجودی پایان هر دوره، به ترتیب مثال‌هایی برای هر نوع از حالت‌های بالا هستند.

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

یک فرض مهم، خطی فرض کردن توابع f و g_i است. به همین دلیل مدل ریاضی بالا، مدل برنامه‌ریزی خطی (LP) نامیده می‌شود.

در عمل، روند نوشتن مدل ریاضی هر مسئله نیز به همین ترتیب است؛ یعنی:

گام اول. با توجه به هدف مسئله، متغیرهای تصمیم را تعریف کرده،

گام دوم. به کمک متغیرها، تابع هدف را می‌نویسیم.

گام سوم. محدودیت‌های مربوط به منابع موردنیاز مسئله را می‌نویسیم.

نکته. محدودیت در مسئله برنامه‌ریزی خطی یک فاکتور بحرانی است؛ زیرا

هرچه تعداد محدودیت بیشتر شود، زمان حل مسئله به‌صورت نمایی بیشتر می‌شود.

ساختار کلی مدل برنامه‌ریزی ریاضی مورد بحث به‌صورت زیر است:

$$\text{Max (or Min) } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

S.T.:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq \text{or} = \text{or} \geq b_1$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq \text{or} = \text{or} \geq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

و یا به‌طور خلاصه می‌توان به شکل زیر نیز نمایش داد:

$$\text{Max (or Min) } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

S.T.:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_j \leq \text{or} = \text{or} \geq b_i$$

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

نمایش ماتریسی. هر مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) را می‌توان در حالت کلی و

به‌طور خلاصه به‌صورت ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$\text{Max } Z = CX$$

$$\text{S.T: } AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

که در نمایش ماتریسی بالا، بردار متغیرها یک ماتریس $n \times 1$ است یعنی:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

بردار سود یا هزینه یک ماتریس $1 \times n$ است یعنی:

$$C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$$

ماتریس ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها یک ماتریس $m \times n$ است یعنی:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

و بردار اعداد سمت راست نیز یک ماتریس $n \times 1$ است:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

مثال ۱. مسئله زیر را در نظر بگیرید. مدل برنامه‌ریزی ریاضی آن (که نحوه نوشتن آن در بخش بعدی بیان خواهد شد) به هر سه شکل بالا نمایش داده شده است.

یک تولیدکننده رول‌های چسب باید رول‌های با عرض استاندارد ۲۰^{cm} را برحسب سفارش مشتری به عرض‌های مختلف برش داده و تحویل دهد. این تولیدکننده به‌تازگی سفارشی به‌صورت زیر دریافت کرده است. برنامه تولیدی شرکت را در قالب یک مدل خطی بیان کنید.

تعداد تقاضا	عرض رول (سانتی متر)
۱۵۰	۵
۲۰۰	۷
۳۰۰	۹

نمایش مدل ریاضی با ساختار کلی:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 \\ \text{st: } &4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 150 \\ &x_2 + x_4 + x_5 \geq 200 \\ &x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 300 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

نمایش مدل ریاضی با ساختار خلاصه:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \sum_{j=1}^6 c_j x_j \\ \text{s.t.: } &\sum_{i=1}^3 a_{ij} x_j \geq b_i \quad ; \quad j=1,2,\dots,6 \\ &x_j \geq 0 \quad ; \quad j=1,2,\dots,6 \end{aligned}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, c_2 = 3, c_3 = 1, c_4 = 4, c_5 = 2, c_6 = 1 \\ \begin{cases} a_{11} = 4, a_{12} = 2, a_{13} = 2, a_{14} = a_{15} = 0, a_{16} = 1 \\ a_{21} = 0, a_{22} = 1, a_{23} = 0, a_{24} = 1, a_{25} = 0, a_{26} = 1 \\ a_{31} = a_{32} = 0, a_{33} = 1, a_{34} = 1, a_{35} = 2, a_{36} = 0 \end{cases} \\ b_1 &= 150, b_2 = 200, b_3 = 300 \end{aligned}$$

نمایش مدل ریاضی با ساختار ماتریسی:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= CX \\ \text{S.T: } &AX \leq b \\ &X \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن: