



دانشگاه پیام نور

## حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر پرستو ریحانی اردبیلی      دکتر مرتضی گرشاسبی

«عضو هیئت علمی دانشگاه پیام نور»      «عضو هیئت علمی دانشگاه علم و صنعت»

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه ملی، که یک واجب دینی است.<sup>۱</sup>

### مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه مطالعه هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

---

۱. پیام مقام معظم رهبری به مناسبت آغاز هفته کتاب ۷۲/۱۰/۴

سوره‌ای که بر آن فرستاده عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «إِقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

## فهرست مطالب

| نه | پیشگفتار                                         |
|----|--------------------------------------------------|
| ۱  | فصل اول: مروری بر نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی |
| ۱  | هدف کلی                                          |
| ۱  | هدف‌های یادگیری                                  |
| ۱  | مقدمه                                            |
| ۴  | ۱-۱ تأثیر شرط اولیه روی دامنه جواب               |
| ۵  | ۲-۱ وجود و یکتایی جواب                           |
| ۷  | ۳-۱ پایداری جواب                                 |
| ۱۱ | خلاصه فصل اول                                    |
| ۱۱ | خودآزمایی تشریحی فصل اول                         |
| ۱۳ | فصل دوم: روش‌های تک‌گامی                         |
| ۱۳ | هدف کلی                                          |
| ۱۳ | هدف‌های یادگیری                                  |
| ۱۳ | مقدمه                                            |
| ۱۵ | ۱-۲ روش اویلر                                    |
| ۱۵ | ۱-۱-۲ الگوریتم روش اویلر                         |
| ۱۸ | ۲-۱-۲ همگرایی روش اویلر                          |
| ۲۳ | ۳-۱-۲ پایداری روش و آنالیز خطای مجانبی           |
| ۲۷ | ۲-۲ روش ذوزنقه‌ای                                |
| ۳۲ | ۳-۲ روش تتا ( $\theta$ )                         |
| ۳۵ | خلاصه فصل دوم                                    |
| ۳۶ | خودآزمایی تشریحی فصل دوم                         |

|     |                                                     |
|-----|-----------------------------------------------------|
| ۴۱  | فصل سوم: روش های چندگامی                            |
| ۴۱  | هدف کلی                                             |
| ۴۱  | هدف های یادگیری                                     |
| ۴۱  | مقدمه                                               |
| ۴۲  | ۱-۳ روش های آدامز - بشفورت                          |
| ۴۵  | ۲-۳ روش های آدامز - مولتون                          |
| ۴۷  | ۳-۳ همگرایی روش های چندگامی                         |
| ۵۳  | ۴-۳ روش های تفاضلی پسرو                             |
| ۵۸  | ۵-۳ ساختن روش های چندگامی همگرا                     |
| ۵۹  | خلاصه فصل سوم                                       |
| ۶۰  | خودآزمایی تشریحی فصل سوم                            |
| ۶۳  | فصل چهارم: روش های رانگ - کوتا                      |
| ۶۳  | هدف کلی                                             |
| ۶۳  | هدف های یادگیری                                     |
| ۶۳  | مقدمه                                               |
| ۶۵  | ۱-۴ کوادراتورهای گوسی و چندجمله ای های متعامد       |
| ۷۳  | ۲-۴ روش های رانگ - کوتای صریح                       |
| ۷۵  | ۱-۲-۴ روش رانگ - کوتای صریح دو مرحله ای (مرتبه دوم) |
| ۷۹  | ۲-۲-۴ روش رانگ - کوتای سه مرحله ای                  |
| ۸۲  | ۳-۴ همگرایی روش های رانگ - کوتا                     |
| ۸۷  | ۴-۴ روش های رانگ - کوتای ضمنی                       |
| ۸۹  | ۵-۴ روش های هم محلی و رانگ - کوتا                   |
| ۹۷  | خلاصه فصل چهارم                                     |
| ۹۷  | خودآزمایی تشریحی فصل چهارم                          |
| ۱۰۱ | فصل پنجم: معادلات دیفرانسیل سخت (Stiff)             |
| ۱۰۱ | هدف کلی                                             |
| ۱۰۱ | هدف های یادگیری                                     |
| ۱۰۱ | مقدمه                                               |
| ۱۰۲ | ۱-۵ مفهوم معادلات دیفرانسیل سخت                     |
| ۱۱۰ | ۲-۵ دامنه پایداری خطی و A- پایداری                  |
| ۱۱۳ | ۳-۵ A- پایداری روش های رانگ - کوتا                  |
| ۱۲۰ | ۴-۵ A- پایداری روش های چندگامی                      |
| ۱۲۶ | خلاصه فصل پنجم                                      |
| ۱۲۷ | خودآزمایی تشریحی فصل پنجم                           |

|     |                                                                              |
|-----|------------------------------------------------------------------------------|
| ۱۳۱ | فصل ششم: مسائل مقدار مرزی مرتبه دوم                                          |
| ۱۳۱ | هدف کلی                                                                      |
| ۱۳۱ | هدف‌های یادگیری                                                              |
| ۱۳۱ | مقدمه                                                                        |
| ۱۳۳ | ۶-۱ یک روش تفاضلات متناهی                                                    |
| ۱۳۳ | ۶-۱-۱ یک روش تفاضلی برای مسائل مرتبه دوم                                     |
| ۱۳۷ | ۶-۱-۲ یک روش تفاضلی با شرایط مرزی شامل مشتق                                  |
| ۱۳۸ | ۶-۲ نظریه مسائل مقدار مرزی غیرخطی مرتبه دوم                                  |
| ۱۴۰ | ۶-۳ روش‌های تفاضلی برای حل مسائل مقدار مرزی غیرخطی مرتبه دو                  |
| ۱۴۴ | ۶-۴ روش‌های پرتابی                                                           |
| ۱۴۷ | خلاصه فصل ششم                                                                |
| ۱۴۸ | خودآزمایی تشریحی فصل ششم                                                     |
| ۱۵۱ | فصل هفتم: روش‌های طیفی و عناصر متناهی برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی |
| ۱۵۱ | هدف کلی                                                                      |
| ۱۵۱ | هدف‌های یادگیری                                                              |
| ۱۵۲ | مقدمه                                                                        |
| ۱۵۴ | ۷-۱ چند ایده در ارتباط با عملکرد عناصر متناهی                                |
| ۱۵۶ | ۷-۲ روش هم محلی                                                              |
| ۱۵۷ | ۷-۳ روش کمترین مربعات                                                        |
| ۱۵۸ | ۷-۴ روش گالرکین                                                              |
| ۱۶۶ | ۷-۵ فرم تغییراتی مسائل مقدار مرزی                                            |
| ۱۷۸ | ۷-۶ روش عناصر متناهی                                                         |
| ۱۷۸ | ۷-۶-۱ مبانی روش عناصر متناهی                                                 |
| ۱۸۷ | ۷-۶-۲ حل یک مسئله از نوع اشتروم - لیوویل                                     |
| ۱۹۴ | ۷-۶-۳ بررسی چند مثال                                                         |
| ۲۰۳ | خلاصه فصل هفتم                                                               |
| ۲۰۴ | خودآزمایی تشریحی فصل هفتم                                                    |
| ۲۰۹ | منابع                                                                        |



## پیشگفتار

کتاب حاضر شامل مباحثی است که در حل عددی معادلات دیفرانسیل مطرح می‌شوند. این کتاب مکمل مباحثی است که در واحدهای مقدماتی معادلات دیفرانسیل معمولی و حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه می‌شوند و قابل استفاده برای دانشجویان تحصیلات تکمیلی رشته ریاضی و نیز رشته‌های فنی و مهندسی و علوم پایه مانند فیزیک و غیره است. همچنین بخش‌هایی از این کتاب قابل تدریس برای دانشجویان مقطع کارشناسی است.

هدف اصلی کتاب حاضر بررسی نظری مباحثی است که در زمینه روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی مطرح می‌شوند. دو دسته کلی مهم از روش‌های عددی عبارت‌اند از روش‌های تفاضل محدود<sup>۱</sup> و روش‌های المان‌های محدود<sup>۲</sup> که بسیار مورد توجه هستند. ابتدا به روش‌های تفاضل محدود پرداخته می‌شود. در این زمینه ارائه مبانی ساختن روش‌های عددی تک‌گامی و چندگامی صریح و ضمنی و نیز ایده ساختن روش‌های کارآمد براساس نتایج حاصل از کوادراتورهای انتگرال از جمله مباحثی هستند که در کتاب حاضر روی آن‌ها تمرکز شده است. آنالیز روش‌های ارائه شده از دیدگاه همگرایی و پایداری یکی دیگر از اهدافی است که در زمینه روش‌های تفاضل محدود به آن پرداخته می‌شود. هر فصل از کتاب شامل مثال‌های مختلف و تمرین‌های متنوع است که در فراگیری مباحث بسیار سودمند است.

---

1. Finite Difference Method (FDM)  
2. Finite Element Method (FEM)

بخش دیگری از کتاب به روش های المان های محدود پرداخته می شود. مبانی این نوع روش ها مطرح می شود و چگونگی استفاده از آنها برای حل مسائل مختلف به صورت کامل تشریح خواهد شد. مسائل مورد بررسی در این کتاب مسائل مقدار اولیه و نیز مقدار مرزی است که هر مبحث به صورت مجزا مورد بحث قرار خواهد گرفت.

# فصل اول

## مروری بر نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی

### هدف کلی

در این فصل برخی مفاهیم اساسی در زمینه مسائل مقدار اولیه معادلات دیفرانسیل معمولی مرور می‌شود. پس از معرفی کلی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی به بحث مسائل مقدار اولیه پرداخت می‌شود و شرایط وجود و یکتایی و پایداری جواب مسائل مقدار اولیه مطرح می‌شود.

### هدف‌های یادگیری

- از خواننده انتظار می‌رود پس از مطالعه و یادگیری مطالب این فصل بتواند:
۱. یک مسئله مقدار اولیه مرتبه  $n$  را به صورت یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل به همراه شرایط اولیه بیان کند.
  ۲. تأثیر شرایط اولیه را بر جواب و دامنه جواب بررسی کند.
  ۳. توانایی بررسی وجود و یکتایی جواب مسائل مقدار اولیه را داشته باشد.
  ۴. توانایی توجیه و بررسی پایداری جواب یک مسئله مقدار اولیه را داشته باشد.

### مقدمه

معادلات دیفرانسیل یکی از ابزارهای بسیار مهم و کاربردی برای مدل‌سازی و بررسی بسیاری از پدیده‌ها به‌شمار می‌آیند. هدف کتاب حاضر ارائه الگوریتم‌های عددی برای تجزیه و تحلیل و حل مسائلی است که در زمینه معادلات دیفرانسیل معمولی مطرح می‌شود. در این

کتاب این مسائل را با نام مسائل معادلات دیفرانسیل معرفی و بررسی خواهیم کرد. در این کتاب یک فرم کلی از معادلات دیفرانسیل معمولی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$y' = f(t, y), \quad y = y(t) \quad (1-1)$$

با فرض حل پذیر بودن این نوع معادلات با روش های کلاسیک، فرم های جواب به صورت صریح، ضمنی و یا پارامتری خواهند بود. همان طوری که در مباحث مقدماتی معادلات دیفرانسیل عنوان می شود، هرگاه این معادله به همراه شرطی که در آن مقدار تابع جواب در یک نقطه مانند  $t$  مشخص شده باشد، مطرح شود به آن یک مسئله گوییم. این مسئله، مسئله مقدار اولیه نام دارد که آن را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$y' = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \quad (2-1)$$

که در آن تابع  $f(t, y)$  تابعی پیوسته در دامنه  $D$  در صفحه  $y$  و  $t$  است. گوییم تابع  $y(t)$  یک جواب (کلاسیک) از مسئله (۲-۱) در دامنه  $a \leq t \leq b$  است، هرگاه به ازای هر  $t$  در این بازه:

$$(t, y(t)) \in D \quad (\text{الف})$$

$$y(t_0) = y_0. \quad (\text{ب})$$

$$y'(t) = f(t, y) \text{ موجود و در معادله } y'(t) = f(t, y) \text{ صدق کند.} \quad (\text{ج})$$

مفاهیم فوق را می توان به دستگاه معادلات دیفرانسیل تعمیم داد. بدین منظور فرض کنید هدف حل دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر باشد:

$$y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t))$$

$$y_2'(t) = f_2(t, y_1(t), \dots, y_n(t))$$

$$\vdots$$

$$y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t))$$

که در آن  $y_i(t), i = 1, 2, \dots, n$  توابعی از متغیر حقیقی  $t$  و مجهول هستند. اگر فرض کنیم این توابع در شرط زیر نیز صدق کنند:

$$y_i(t_0) = y_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

در این صورت می توان این مسئله را به فرم ماتریسی زیر در نظر گرفت:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (3-1)$$

که در آن

$$f(t, y) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ \vdots \\ y_{n,0} \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \quad (4-1)$$

باید به این نکته توجه داشت که هر مسئله مقدار اولیه از مرتبه بالاتر از یک را می‌توان به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به همراه شرط اولیه مطرح کرد. فرض کنید هدف بررسی مسئله مقدار اولیه  $n$ ام زیر است:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (5-1)$$

$$y^{(k)}(t_0) = y_{k,0}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6-1)$$

به صورت  $z_k(t), k = 1, \dots, n$  با معرفی توابع کمکی:

$$z_1(t) = y(t)$$

$$z_2(t) = y'(t)$$

$\vdots$

$$z_n(t) = y^{(n-1)}(t) \quad (7-1)$$

معادله (5-1) را می‌توان به صورت دستگاه معادلات زیر نوشت:

$$z' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ f(t, z_1, \dots, z_n) \end{pmatrix} \quad (8-1)$$

همچنین شرایط اولیه (6-1) بر حسب توابع کمکی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$z_0 = \begin{pmatrix} z_1(t_0) \\ \vdots \\ z_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ \vdots \\ y_{n,0} \end{pmatrix} \quad (9-1)$$

### ۱-۱ تأثیر شرط اولیه روی دامنه جواب

بررسی تأثیر شرایط اولیه بر روی جواب مسائل مقدار اولیه و نیز دامنه این جواب‌ها از جمله مسائلی است که از دیدگاه‌های نظری و عددی بسیار حائز اهمیت است. در این بخش با ارائه چند مثال، اهمیت این موضوع را بررسی می‌کنیم. ابتدا فرض کنید هدف حل مسئله مقدار اولیه خطی زیر است:

$$y'(t) + p(t)y(t) = q(t), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1-1)$$

می‌توان جواب این مسئله را به صورت زیر به دست آورد:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[ \int_{t_0}^t \mu(s)q(s)ds + y_0 \mu(t_0) \right], \quad \mu(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t p(s)ds\right)$$

با فرض پیوستگی  $p(t)$  و  $q(t)$ ، ملاحظه می‌شود  $y$  تأثیری در دامنه جواب مسائل خطی نخواهد داشت. اما در مسائل غیرخطی، مقدار  $y$  در دامنه جواب مؤثر خواهد بود. برای روشن‌تر شدن این مطلب به مثال‌های زیر توجه کنید.

**مثال ۱-۱** مسئله غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$y'(t) + y^2(t) - y(t) = 0$$

باتوجه به تفکیک‌پذیر بودن این معادله، می‌توان به سادگی نشان داد جواب معادله به صورت زیر است:

$$y(t) = \frac{1}{1 + ce^{-t}} \quad (1-1)$$

که  $c$  یک ثابت دلخواه است. فرض کنید شرط اولیه  $y(0) = y_0$  برای معادله در دست باشد. با استفاده از این شرط داریم  $c = \frac{1}{y_0} - 1$ . مشخص است که اگر  $y_0 > 0$ ، آنگاه  $c > -1$  و جواب مسئله در دامنه  $[0, \infty)$  موجود است. اما اگر  $y_0 < 0$ ، آنگاه جواب در بازه محدود  $[0, \ln(1 - y_0^{-1}))$  موجود است.

مشخص است که اگر  $t = \ln(1 - y_0^{-1})$ ، آنگاه منحنی کسر در عبارت جواب مسئله صفر می‌شود و به ازای این  $t$  جواب مسئله به بی‌نهایت میل می‌کند. تابع  $f(t, y(t))$  در این مسئله به صورت  $f(t, y) = y - y^2$  است که تابعی کاملاً هموار است.

**مثال ۲-۱** معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$y'(t) = -y^2(t)$$

تابع ثابت  $y \equiv 0$  و تابع زیر جواب‌های این معادله هستند:

$$y(t) = \frac{1}{t+c} \quad (12-1)$$

که در آن  $c$  یک ثابت دلخواه است. اگر شرط اولیه‌ای مانند  $y(0) = y_0$  در دست باشد، آنگاه جواب غیربدیهی مسئله عبارت است از:

$$y(t) = \frac{1}{t+y_0^{-1}}$$

به ازای  $y_0 > 0$ ، دامنه جواب  $[0, \infty)$  است. اما اگر  $y_0 < 0$ ، جواب تنها در بازه  $(-y_0^{-1}, 0)$  موجود است.

به عنوان نکته دیگر توجه کنید که به ازای  $0 < y_0 < 1$  با  $c = y_0^{-1} - 1$ ، جواب  $(11-1)$  با افزایش  $t$  صعودی است و به ازای  $y_0 > 0$  با  $c = y_0^{-1}$ ، جواب  $(12-1)$  با افزایش  $t$  نزولی است.

## ۲-۱ وجود و یکتایی جواب

قبل از پرداختن به روش‌های عددی حل مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی، بحث در مورد وجود، یکتایی و پایداری جواب این مسائل بسیار سودمند خواهد بود. در این بخش بدون ارائه اثبات، قضایای وجود و یکتایی جواب مسائل مقدار اولیه را بیان خواهیم کرد. اثبات این قضایا در مراجع [۱-۳] ارائه شده‌اند.

**قضیه ۱-۱** فرض کنید  $D$  یک مجموعه باز و همبند در  $\mathbb{R}^2$ ،  $f(t, y)$  تابعی پیوسته از متغیرهای  $t$  و  $y$  عضو  $D$  و  $(t, y_0)$  یک نقطه داخلی  $D$  باشد. اگر تابع  $f(t, y)$  در شرط لپ شیتز<sup>۱</sup> با ثابت  $k > 0$  به صورت زیر صدق کند.

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|, \quad (t, y_1), (t, y_2) \in D$$

آنگاه تابع یکتای  $y = y(t)$  موجود است که به ازای برخی مقادیر  $\alpha > 0$ ، در مسئله زیر صدق خواهد کرد:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t, -\alpha \leq t \leq t_0 + \alpha$$

$$y(t_0) = y_0$$

در حالت کلی به راحتی می توان نشان داد اگر  $\frac{\partial f(t, y)}{\partial y}$  در  $D$  موجود و کراندار باشد،  $f$  در شرط لیپ شیتز صدق می کند. برای نشان دادن این حکم، کافی است فرض کنیم:

$$k = \max_{(t, y) \in D} \left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right| \quad (13-1)$$

استفاده از قضیه مقدار میانگین نتیجه می دهد:

$$f(t, y_1) - f(t, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi)(y_1 - y_2), \quad y_1 < \xi < y_2$$

اعمال قدر مطلق به طرفین تساوی فوق و استفاده از (13-1)، لیپ شیتز بودن  $f$  را ثابت می کند.

قضیه فوق را برای مثال های زیر بررسی می کنیم.

مثال 1-3 معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$y' = 1 + \sin(t y)$$

فرض کنید:

$$D = \{(t, y) \mid 0 \leq t \leq 1, -\infty < y < +\infty\}$$

مشخص است که:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = t \cos(t y)$$

و از رابطه (13-1) داریم  $k=1$ . بنابراین به ازای هر  $0 < t < 1$  و شرط اولیه  $y(t_0) = y_0$  این مسئله در بازه  $[t_0, t_0 + \alpha] \subset [0, 1]$  دارای جواب یکتا است.

در بسیاری از مسائل کاربردی،  $f$  و  $\frac{\partial f}{\partial y}$  توابعی پیوسته هستند، اما در دامنه  $D$  توابعی کراندار نیستند. این مسائل، گرچه حل پذیر هستند اما دامنه جواب روی متغیر  $t$  محدود به یک بازه مشخص حول  $t_0$  می باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال 1-4 مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1$$

ملاحظه می شود جواب مسئله به صورت  $y(t) = \frac{1}{1-t}$  است. واضح است که به ازای

$t < 1$  جواب مسئله موجود است. در این مثال  $f(t, y) = y^2$  و  $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = 2y$ . مشخص است که این توابع پیوسته هستند اما دامنه جواب براساس شرط اولیه محدود به  $t < 1$  است.

تعمیم قضیه ۱-۱ برای دستگاه معادلات دیفرانسیل به صورت زیر مطرح می شود:

**قضیه ۲-۱** فرض کنید  $f = (f_1(t, y), \dots, f_n(t, y))$  تابعی تعریف شده و پیوسته در ناحیه  $S = \{(t, y) | a \leq t \leq b, y \in \mathbb{R}^n\}$  باشد که در آن  $a$  و  $b$  دو عدد مشخص هستند. همچنین فرض کنید تابع  $f$  در شرط لیب شیتز با ثابت  $k$  به صورت زیر صدق می کند.

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$$

که در آن  $\|\cdot\|$  یک نرم در  $\mathbb{R}^n$  را نشان می دهد. در این صورت به ازای هر

$$a \leq t \leq b \text{ و } y_0 \in \mathbb{R}^n, \text{ تنها یک تابع } y(t) \text{ موجود است که:}$$

۱.  $y(t)$  تابعی پیوسته از  $t$  و به صورت پیوسته مشتق پذیر در بازه  $[a, b]$  است.

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad a \leq t \leq b \quad ۲.$$

$$y(t_0) = y_0. \quad ۳.$$

مانند قضیه ۱-۱، ملاحظه می شود شرط لیب شیتز برقرار است اگر

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j}, \quad i, j = 1, \dots, n \text{ در ناحیه } S \text{ موجود، پیوسته و کراندار باشند. } \square$$

### ۳-۱ پایداری جواب

یکی از مباحث مهم که در مسائل مقدار اولیه مورد توجه است، پایداری جواب این مسائل است. از دیدگاه نظری پایداری جواب مسئله مقدار اولیه (۲-۱) به این معنا است که اگر شرط اولیه با اختلالی جزئی مانند  $\varepsilon$  همراه شود، آنگاه این اختلال باعث یک اختلال بزرگ در خروجی یعنی جواب مسئله نشود. در حالت کلی تر فرض کنید  $y_{\varepsilon, \delta}(t)$  جواب مسئله (۳-۱) با شرط اولیه یافته باشد و سمت راست معادله هم با یک اختلال همراه باشد:

$$y'_{\varepsilon, \delta}(t) = f(t, y_{\varepsilon, \delta}(t)) + \delta(x), \quad a \leq t \leq b, y_{\varepsilon, \delta}(t_0) = y_0 + \varepsilon \quad (۱۴-۱)$$

فرض کنید  $f$  در شرایط قضیه ۳-۱ صدق می کند و اختلال  $\delta(t)$  تابعی پیوسته در ناحیه  $S$  باشد. می توان نشان داد مسئله (۳-۱) دارای جواب یکتا است.

**قضیه ۳-۱** با فرض برقراری شرایط قضیه ۲-۱ و پیوستگی  $\delta(t)$  در  $k$  وجود دارد

$D \subseteq S$  که در ناحیه  $D$ ، اگر اختلالات  $\varepsilon$  و  $\delta(t)$  در شرط زیر صدق کنند:

$$|\varepsilon| < \varepsilon, \quad \|\delta\|_{\infty} \leq \varepsilon,$$

آنگاه مسئله (۱-۱۴) دارای جواب یکتا است، که در آن  $\varepsilon$  به اندازه کافی کوچک فرض می شود. اگر  $y(t)$  جواب مسئله مقدار اولیه (۱-۳) باشد، آنگاه:

$$\|y(t) - y_{\varepsilon, s}(t)\|_{\infty} \leq p \leq (\|\varepsilon\| + c \|\delta\|_{\infty}), \quad c > 0. \quad (15-1)$$

$$\square. p = \frac{1}{1 - ck} \quad \text{که در آن}$$

این قضیه نشان دهنده خوش وضع بودن<sup>۱</sup> مسئله مورد بررسی است. خوش وضعی و بد وضعی<sup>۲</sup> برای یک مسئله براساس وجود، یکتایی و پایداری جواب تعریف می شوند. برقراری هم زمان این سه شرط به معنای خوش وضع بودن مسئله مورد نظر و عدم برقراری هر کدام از شرایط به مفهوم بد وضع بودن آن است. با استناد به قضیه های ۱-۲ و ۱-۳، اگر شرایط ذکر شده روی تابع  $f(t, y)$  و شرط اولیه آن برقرار باشند، وجود، یکتایی و پایداری جواب مسئله مقدار اولیه (۱-۳) تضمین خواهد شد. باید توجه کرد با وجود برقراری این شرایط، استفاده از روش های عددی برای حل یک مسئله خوش وضع، ممکن است به یک مسئله بد حالت<sup>۳</sup> منجر شود. یادآوری می شود خوش حالتی و بد حالتی یک الگوریتم عددی بر مبنای میزان انتشار خطای آن ها تعریف می شوند. یکی از منابع اصلی خطا، خطای ماشین محاسبه گر است. به دلیل خطای ذخیره و بازیابی اعداد، خطای داده های ورودی و اعمال ماشینی، به طور کلی مواجه شدن با خطای ماشین اجتناب ناپذیر است و روش ها و الگوریتم های عددی که این خطاهای ورودی را به صورت قابل توجهی انتشار دهند، بد حالت قلمداد می شوند. برای روشن شدن موضوع حالتی را فرض کنید که به ازای  $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  و  $y \in \mathbb{R}$ ، می خواهیم جواب مسئله مقدار اولیه ای را بررسی کنیم که تنها  $y$  با  $\varepsilon$  اختلال یافته باشد. فرض کنید  $y_{\varepsilon}(t)$  جواب مسئله اختلال یافته زیر باشد.

$$y'_{\varepsilon}(t) = f(t, y_{\varepsilon}(t)) \quad , \quad t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha$$

$$y_{\varepsilon}(t_0) = y_0 + \varepsilon$$

اگر  $y(t)$  جواب مسئله اصلی باشد پس:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y'(t_0) = y_0.$$

اگر معادلات نظیر را از هم کم کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} z'(t) &= f(t, y_\varepsilon(t)) - f(t, y(t)) \\ z(t_0) &= \varepsilon \end{aligned} \quad (16-1)$$

که در آن  $z(t) = y_\varepsilon(t) - y(t)$ . طرف راست معادله (۱۶-۱) را به کمک قضیه مقدار میانگین به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$z'(t) \cong \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) z(t), \quad z(t_0) = \varepsilon \quad (17-1)$$

این تقریب زمانی که  $y_\varepsilon(t)$  به  $y(t)$  نزدیک باشد، مناسب خواهد بود. با حل مسئله تقریبی (۱۷-۱) داریم:

$$z(t) \cong \varepsilon \exp \left\{ \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial y}(s, y(s)) ds \right\} \quad (18-1)$$

حال اگر به ازای  $t$ ‌هایی که  $|t - t_0| \leq \alpha$ ،  $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \leq 0$ ، آنگاه در این بازه  $z(t)$  با  $\varepsilon$  کراندار خواهد بود. در این صورت گوییم این مسئله خوش حالت است.

**مثال ۱-۴** مسئله خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$y' = \lambda y + g(t), \quad y(0) = y_0, \quad \lambda > 0$$

مشخص است که  $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda > 0$ . بنابراین از (۱۸-۱) داریم:

$$z(t) = \varepsilon e^{\lambda t}$$

این نتیجه نشان می‌دهد با افزایش  $t$  اختلاف بین  $y_\varepsilon(t)$  و  $y(t)$  افزایش خواهد یافت و در نتیجه این مسئله بدحالت خواهد بود.

بنابر رابطه (۱۸-۱) هرگاه  $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$  در دامنه‌ای که جواب را مورد بررسی قرار می‌دهیم، منفی یا کمتر از یک عدد مثبت کوچک باشد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت خطای بین  $y(t)$  و  $y_\varepsilon(t)$  با ضریبی از  $\varepsilon$  کراندار خواهد بود و مسئله خوش حالت است. هرچقدر از لحاظ کمی، مقدار  $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$  عدد منفی بزرگ‌تری باشد، آنگاه سرعت میل کردن  $z(t)$  به صفر بیشتر خواهد بود. با این وجود برای مسائلی که از نظر نظری، خوش حالت هستند، زمانی که از روش‌های عددی استفاده می‌کنیم، باز مشکلاتی پیش خواهد آمد که در فصل‌های آینده به آن خواهیم پرداخت. مسائلی که چنین مشکلاتی را دارند به مسائل سخت<sup>۱</sup> شهرت دارند.

پیوستگی جواب مسائل مقدار اولیه در حالت ماتریسی به شرط اولیه مسائل را می‌توان از قضیه زیر نتیجه گرفت:

**قضیه ۱-۴** فرض کنید  $S = \{(t, y) | a \leq t \leq b, y \in \mathbb{R}^n\}$  و  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک تابع پیوسته باشد که در شرط لیب شیتز با ثابت  $k$  به صورت زیر صدق می‌کند.

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|, \quad (t, y_i) \in S, i=1,2$$

اگر  $t_0 \in [a, b]$  آنگاه اگر  $y(t, w)$  جواب مسئله مقدار اولیه زیر باشد:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0, w) = w$$

در این صورت

$$\|y(t; w_1) - y(t; w_2)\| \leq e^{k|t-t_0|} \|w_1 - w_2\|, \quad t \in [a, b] \quad (19-1)$$

در مورد پیوستگی جواب مسئله مقدار اولیه به شرط اولیه آن، می‌توان قضیه زیر را نیز برای دستگاه معادلات دیفرانسیل مطرح کرد.

**قضیه ۱-۵** علاوه بر مفروضات قضیه ۱-۴، اگر ماتریس ژاکوبی

$$D_y f(t, y) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)_{ij}$$

در  $S$  موجود، پیوسته و کراندار باشد

$$\|D_y f(t, y)\| \leq k, \quad (t, y) \in S$$

در این صورت جواب مسئله مقدار اولیه:

$$y' = f(t, y)$$

$$y(t_0) = w$$

بر حسب  $w$  به صورت پیوسته مشتق پذیر خواهد بود  $(w = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n))$  و

مشتق  $y$  نسبت به  $w$  که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$z(t; w) = D_w y(t) = \left[ \frac{\partial y}{\partial \beta_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial \beta_n} \right]$$

جوابی از مسئله مقدار اولیه زیر خواهد بود:

$$z' = D_y f(t, y(t))z, \quad z(t_0, w) = I. \quad \square \quad (20-1)$$

توجه شود که  $z = z(t)$ ،  $D_y(t)y(t)$  ماتریس‌هایی  $n \times n$  هستند. بنابراین (۲۰-۱) نشان‌دهنده یک سیستم از  $n^2$  معادله دیفرانسیل به همراه  $n^2$  شرط اولیه است.

به دلیل کاربردهای مختلف، در بسیاری از مسائل نیاز است که تخمینی از رشد جواب

$z(t)$  به کمک رابطه (۱۹-۱) داشته باشیم. برای این منظور قضیه زیر می‌تواند بسیار

راه‌گشا باشد. فرض کنید مسئله ماتریسی زیر را بررسی می‌کنیم:

$$y' = T(t)y, \quad y(a) = I \quad (21-1)$$

که در آن  $y$  یک ماتریس  $n \times n$  از مجهولات و  $T(x)$  ماتریس ضرایب و  $I$  ماتریس همانی است.

**قضیه ۶-۱** در مسئله (۲۱-۱) فرض کنید  $T(t)$  روی  $t \in [a, b]$  پیوسته باشد و  $k(t) = \|T(t)\|$ ، در این صورت جواب این مسئله در نامساوی زیر صدق می‌کند.

$$\|y(t) - I\| \leq \exp\left(\int_t^t k(s)ds\right) - 1, \quad t \geq a. \square$$

## خلاصه فصل اول

در این فصل یک صورت کلی از معادلات دیفرانسیل معمولی بیان شد و مفهوم جواب کلاسیک این نوع معادلات تشریح شد. نشان داده شد که یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه بزرگ‌تر از یک را می‌توان به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول نوشت.

در ادامه در بخش ۱-۲ به مسائل مقدار اولیه مربوط به معادلات مرتبه اول پرداخته شد و تأثیر شرط اولیه روی دامنه جواب مورد بررسی قرار گرفت.

در بخش ۱-۳ به بررسی وجود و یکتایی جواب مسائل مقدار اولیه مربوط به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول پرداخته شد.

یکی دیگر از مباحث بسیار مهم در مورد مسائل مقدار اولیه، مبحث پایداری جواب‌ها است که در بخش ۱-۴ به آن پرداخته و چند قضیه کاربردی در این زمینه مطرح شد.

## خودآزمایی تشریحی فصل اول

۱. مسئله مقدار اولیه زیر را به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به همراه یک شرط اولیه بنویسید

$$A_n(t)y^{(n)} + A_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + A_1(t)y = G(t), \quad t > t_0,$$

$$y(t_0) = \beta_0, y'(t_0) = \beta_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = \beta_{n-1}$$