



دانشگاه پیام نور

مبانی جبر

دکتر میریوسف صادقی دکتر خدیجه احمدی آملی

دکتر محمد حمیدی

امروز کتابخوانی و علم‌آموزی نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.^۱

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتابخوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه مطالعه هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین سوره‌ای که بر آن فرستاده عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد

1. <https://farsi.khamenei.ir/message-content?id=2696>

شده است: «إِقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده اند.

دانشگاه پیام نور با گستره جغرافیایی ایران شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه جا و همه وقت، به عنوان دانشگاهی کتاب محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره گیری از تجربه های گرانقدر استادان و صاحب نظران برجسته کشورمان، کتاب ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه مهم و خطیر یاری رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه خطیر یاری می رسانند، سپاسگزاری می نمایم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام نور را منزلگاه اندیشه سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام نور

فهرست مطالب

سیزده

پیشگفتار

۱	فصل اول: مقدمات و پیش‌نیازها
۱	هدف کلی
۱	هدف‌های یادگیری
۲	مقدمه
۲	۱-۱ اعداد صحیح
۸	۲-۱ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۹	۳-۱ تمرین‌ها
۱۰	۴-۱ رابطه‌ها و مجموعه‌های به‌طور جزئی مرتب
۱۷	۵-۱ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۱۸	۶-۱ تمرین‌ها
۲۰	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل اول

۲۱	فصل دوم: جبر جامع
۲۱	هدف کلی
۲۱	هدف‌های یادگیری
۲۱	مقدمه
۲۲	۱-۲ جبر
۲۶	۲-۲ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۲۷	۳-۲ تمرین‌ها
۲۸	۴-۲ دستگاه جبر جامع
۳۰	۵-۲ تمرین‌ها
۳۰	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل دوم

۳۳	فصل سوم: چند جبر جامع متعارف
۳۳	هدف کلی

۳۳	هدف‌های یادگیری
۳۳	مقدمه
۳۴	۱-۳ چند جبر جامع
۳۷	۲-۳ حل تمرین ستاره‌دار
۳۸	۳-۳ تمرین‌ها
۳۹	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل سوم
۴۱	فصل چهارم: جبر جامع شبکه
۴۱	هدف کلی
۴۱	هدف‌های یادگیری
۴۲	مقدمه
۴۲	۱-۴ شبکه‌ها
۴۶	۲-۴ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۴۸	۳-۴ تمرین‌ها
۴۹	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل چهارم
۵۱	فصل پنجم: زیرجبرهای جامع
۵۱	هدف کلی
۵۱	هدف‌های یادگیری
۵۱	مقدمه
۵۲	۱-۵ زیرجبرها
۵۵	۲-۵ ضرب جبرها
۵۶	۳-۵ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۵۶	۴-۵ تمرین‌ها
۵۷	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل پنجم
۵۹	فصل ششم: جبرهای جامع خارج قسمتی
۵۹	هدف کلی
۵۹	هدف‌های یادگیری
۶۰	مقدمه
۶۰	۱-۶ همریختی‌ها
۶۲	۲-۶ حل تمرین ستاره‌دار
۶۲	۳-۶ تمرین‌ها
۶۳	۴-۶ روابط همنهشت و قضیه اساسی همریختی‌ها
۶۶	۵-۶ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۶۶	۶-۶ تمرین‌ها
۶۷	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل ششم

۶۹	فصل هفتم: گروه‌ها
۶۹	هدف کلی
۶۹	هدف‌های یادگیری
۶۹	مقدمه
۷۰	۱-۷ گروه‌ها
۷۸	۲-۷ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۷۹	۳-۷ تمرین‌ها
۸۱	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل هفتم
۸۳	فصل هشتم: خواص اساسی گروه‌ها
۸۳	هدف کلی
۸۳	هدف‌های یادگیری
۸۴	مقدمه
۸۴	۱-۸ خواص مشترک گروه‌ها
۹۰	۲-۸ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۹۱	۳-۸ تمرین‌ها
۹۳	۴-۸ گروه‌های متناهی و جدول کیلی
۱۰۱	۵-۸ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۱۰۱	۶-۸ تمرین‌ها
۱۰۲	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل هشتم
۱۰۵	فصل نهم: مقدمه‌ای بر گروه‌های جایگشتی
۱۰۵	هدف کلی
۱۰۵	هدف‌های یادگیری
۱۰۵	مقدمه
۱۰۶	۱-۹ گروه‌های جایگشتی
۱۰۸	۲-۹ تمرین‌ها
۱۰۸	۳-۹ نمایش دو سطری جایگشت‌ها
۱۱۱	۴-۹ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۱۱۱	۵-۹ تمرین‌ها
۱۱۲	۶-۹ دورها
۱۱۷	۷-۹ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۱۱۸	۸-۹ تمرین‌ها
۱۱۹	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل نهم
۱۲۱	فصل دهم: زیرگروه‌ها
۱۲۱	هدف کلی

۱۲۱	هدف‌های یادگیری
۱۲۱	مقدمه
۱۲۲	۱-۱۰ زیرگروه‌ها
۱۳۱	۱۰-۲ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۱۳۳	۱۰-۳ تمرین‌ها
۱۳۴	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل دهم
۱۳۷	فصل یازدهم: زیرگروه‌های تولید شده
۱۳۷	هدف کلی
۱۳۷	هدف‌های یادگیری
۱۳۷	مقدمه
۱۳۸	۱۱-۱ زیرگروه تولید شده توسط یک مجموعه
۱۴۱	۱۱-۲ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۱۴۱	۱۱-۳ تمرین‌ها
۱۴۲	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل یازدهم
۱۴۳	فصل دوازدهم: گروه‌های دوری و رتبه یک عنصر
۱۴۳	هدف کلی
۱۴۳	هدف‌های یادگیری
۱۴۳	مقدمه
۱۴۴	۱۲-۱ گروه‌های دوری
۱۵۱	۱۲-۲ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۱۵۴	۱۲-۳ تمرین‌ها
۱۵۵	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل دوازدهم
۱۵۷	فصل سیزدهم: هم‌ریختی‌های گروه‌ها
۱۵۷	هدف کلی
۱۵۷	هدف‌های یادگیری
۱۵۸	مقدمه
۱۵۸	۱۳-۱ هم‌ریختی‌ها
۱۶۴	۱۳-۲ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۱۶۵	۱۳-۳ تمرین‌ها
۱۶۵	۱۳-۴ رده‌بندی گروه‌های دوری
۱۶۷	۱۳-۵ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۱۶۷	۱۳-۶ تمرین‌ها
۱۶۸	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل سیزدهم

۱۶۹	فصل چهاردهم: هم مجموعه‌ها و قضیه لاگرانژ
۱۶۹	هدف کلی
۱۶۹	هدف‌های یادگیری
۱۷۰	مقدمه
۱۷۰	۱-۱۴ هم مجموعه‌ها
۱۷۳	۲-۱۴ قضیه لاگرانژ
۱۷۷	۳-۱۴ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۱۷۹	۴-۱۴ تمرین‌ها
۱۸۰	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل چهاردهم
۱۸۱	فصل پانزدهم: گروه‌های خارج قسمتی
۱۸۱	هدف کلی
۱۸۱	هدف‌های یادگیری
۱۸۱	مقدمه
۱۸۲	۱-۱۵ زیرگروه‌های نرمال و گروه‌های خارج قسمتی
۱۸۹	۲-۱۵ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۱۸۹	۳-۱۵ تمرین‌ها
۱۹۱	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل پانزدهم
۱۹۳	فصل شانزدهم: قضایای یکریختی گروه‌ها
۱۹۳	هدف کلی
۱۹۳	هدف‌های یادگیری
۱۹۳	مقدمه
۱۹۴	۱-۱۶ قضایای یکریختی
۱۹۷	۲-۱۶ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۱۹۸	۳-۱۶ تمرین‌ها
۱۹۹	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل شانزدهم
۲۰۱	فصل هفدهم: حاصل ضرب مستقیم گروه‌ها
۲۰۱	هدف کلی
۲۰۱	هدف‌های یادگیری
۲۰۲	مقدمه
۲۰۲	۱-۱۷ حاصل ضرب مستقیم خارجی و داخلی
۲۰۶	۲-۱۷ تمرین‌ها
۲۰۷	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل هفدهم

۲۰۹	فصل هجدهم: حلقه‌ها
۲۰۹	هدف کلی
۲۰۹	هدف‌های یادگیری
۲۰۹	مقدمه
۲۱۰	۱-۱۸ مفهوم و ساختار حلقه‌ها
۲۱۵	۲-۱۸ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۲۱۶	۳-۱۸ تمرین‌ها
۲۱۶	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل هجدهم
۲۱۹	فصل نوزدهم: خواص اساسی حلقه‌ها
۲۱۹	هدف کلی
۲۱۹	هدف‌های یادگیری
۲۲۰	مقدمه
۲۲۰	۱-۱۹ خواص مشترک حلقه‌ها
۲۲۷	۲-۱۹ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۲۳۱	۳-۱۹ تمرین‌ها
۲۳۲	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل نوزدهم
۲۳۳	فصل بیستم: زیرحلقه‌ها و ایده آل‌ها
۲۳۳	هدف کلی
۲۳۳	هدف‌های یادگیری
۲۳۴	مقدمه
۲۳۴	۱-۲۰ زیرحلقه‌ها
۲۳۶	۲-۲۰ تمرین‌ها
۲۳۷	۳-۲۰ ایده آل‌ها
۲۴۷	۴-۲۰ تمرین‌ها
۲۴۷	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل بیستم
۲۴۹	فصل بیست و یکم: حلقه‌های خارج قسمتی
۲۴۹	هدف کلی
۲۴۹	هدف‌های یادگیری
۲۴۹	مقدمه
۲۵۰	۱-۲۱ ساختار حلقه‌های خارج قسمتی
۲۵۲	۲-۲۱ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۲۵۳	۳-۲۱ تمرین‌ها
۲۵۵	۴-۲۱ ایده آل‌های اول و ایده آل‌های ماکسیمال
۲۶۰	۵-۲۱ حل تمرین‌های ستاره‌دار

۲۶۳	۶-۲۱ تمرین‌ها
۲۶۴	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل بیست و یکم
۲۶۵	فصل بیست و دوم: هم‌ریختی‌های حلقه‌ها و حلقه‌های چندجمله‌ای
۲۶۵	هدف کلی
۲۶۵	هدف‌های یادگیری
۲۶۶	مقدمه
۲۶۶	۱-۲۲ هم‌ریختی‌های حلقه‌ها
۲۷۳	۲-۲۲ قضایای اساسی هم‌ریختی‌های حلقه‌ای
۲۷۶	۳-۲۲ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۲۸۰	۴-۲۲ تمرین‌ها
۲۸۲	۵-۲۲ حلقه‌های چندجمله‌ای
۲۹۲	۶-۲۲ حل تمرین‌های ستاره‌دار
۲۹۵	۷-۲۲ تمرین‌ها
۲۹۵	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل بیست و دوم
۲۹۷	پاسخنامه
۲۹۹	منابع

پیشگفتار

کتاب حاضر براساس «برنامه آموزشی و سرفصل دروس دوره کارشناسی رشته ریاضیات و کاربردها» مصوب شورای برنامه‌ریزی آموزش عالی وزارت علوم، تحقیقات و فناوری مورخ ۱۳۸۸/۲/۲۶ تهیه شده است. بر این اساس، کتاب شامل سه قسمت است: جبر جامع، گروه‌ها و مفاهیم اولیه حلقه‌ها. هر قسمت شامل تعدادی فصل است. سعی شده است فصول به‌گونه‌ای تقسیم‌بندی شوند که در هر فصل، فراگیرنده تنها با یک یا دو مفهوم آشنا شود و بدین سبب انگیزه وی برای تعقیب فصول بعدی افزایش یابد. بدین خاطر تعداد فصول زیاد شده اما مفاهیم در هر فصل کم است. در زیر ساختار کتاب را توضیح می‌دهیم تا خواننده متوجه دلیل حجم به ظاهر زیاد کتاب شود.

از آنجایی که در رشته ریاضی اساس یادگیری بر مبنای حل تمرین و پاسخ دادن به مسائل است، در تدوین این کتاب سعی شده مطالب درسی در هر فصل، به همراه مثال‌ها و تمرین‌های متنوعی ارائه شود. در حین ارائه هر فصل، سؤالاتی تحت عنوان پرسش نظری (با علامت ؟) را ملاحظه می‌کنید. این گونه سؤالات در بسیاری از اوقات انگیزه شروع بحث بعدی را در فراگیرنده ایجاد می‌کند و گاهی او را به تجزیه و تحلیل بحث قبلی سوق می‌دهد. همچنین تمرین‌هایی (با علامت *) را مشاهده می‌کنید که به منظور تمرین و کمک به یادگیری آن مبحث آورده شده است. فراگیرنده پس از تلاش برای حل این تمرین‌ها، برای اطمینان از درستی پاسخ خود می‌تواند به انتهای آن بخش مراجعه کند. در انتهای هر بخش نیز تمرین‌های متنوعی وجود دارد. سعی شده است آن دسته از تمرین‌ها که نیاز به جهت دادن فراگیرنده به دستیابی راه حل داشته‌اند، نیز به همراه راهنمایی آورده شوند. در پایان هر فصل نیز وفق شیوه‌نامه

تدوین کتب درسی دانشگاه پیام نور، خودآزمایی‌های چهارگزینه‌ای تهیه شده است که در مجموع بالغ بر صد سؤال چهارگزینه‌ای را شامل می‌باشد. همچنین مولفین بر این عقیده‌اند که به‌جای تهیه واژه‌نامه در انتهای کتاب (که غالباً از نظر فراگیرنده دور می‌ماند)، ترجمه انگلیسی کلیه اصطلاحات به‌کار گرفته شده در متن را دقیقاً در زیرنویس همان صفحه‌ای که آن لغت در آن صفحه برای اولین بار معرفی و بیان می‌شود، ارائه دهند. بدین شکل یادگیری توأمأ در متن شکل می‌گیرد.

قسمت اول کتاب، متشکل از شش فصل است. فصل اول شامل پیش‌نیازهای فصل‌های پیش‌رو است که مطالعه آن بر حسب نیاز فراگیرنده است و در تدریس آن الزامی نیست. در فصل دوم تا ششم به مفهوم جبر جامع و زیرساختارهای آن می‌پردازیم. در این فصول مفهوم اساسی عمل‌های چندتایی روی مجموعه‌های ناتهی را معرفی می‌کنیم. مجموعه عمل‌های چندتایی روی هر مجموعه ناتهی دلخواه منجر به تعریف جبرهای جامع متنوع و متفاوت می‌شود. تلاش مؤلفین در این فصول بر این است که هر مجموعه ناتهی دلخواه را در حالت محض به عمل‌های چندتایی مجهز کند تا بر این اساس مجموعه‌ها را قانونمند کند و به حالت جبر جامع استخراج کند که در دنیای معاصر کاربردهای زیادی دارند. مفاهیم اساسی گروه‌واره، نیم‌گروه، تک‌واره، شبه‌گروه، گروه و شبکه نوع خاصی از جبرهای جامع هستند که در این فصول معرفی و تجزیه و تحلیل شده‌اند. معرفی زیرساختارهای جبر جامع یکی از مهم‌ترین مباحث جبر جامع است که تحت عنوان زیرجبر جامع ارائه شده است. به‌علاوه توسیع جبر جامع تحت عنوان حاصل ضرب جبرهای جامع و تحدید زیرجبر جامع به زیرجبرهای جامع تولید شده از اهداف فصل‌های ذکر شده است.

یکی از مهم‌ترین اهداف این فصول معرفی ارتباط دهنده جبرهای جامع تحت عنوان هم‌ریختی است که خواص و کاربردهای مهمی در ساختار جبرهای جامع دارند. اهمیت روابط هم‌ارزی در نظریه مجموعه‌ها بر هیچ کس پوشیده نیست به‌خصوص در ایجاد مجموعه‌های خارج قسمتی و افزای مجموعه‌ها، لذا این باعث انگیزه معرفی روابط هم‌ارزی‌های همنهشت می‌گردد که به‌کمک آن‌ها جبر جامع خارج قسمتی و قضایای اساسی جبرهای جامع ارائه می‌گردند.

قسمت دوم کتاب، متشکل از یازده فصل است. در فصل هفتم تا هجدهم به معرفی گروه‌ها می‌پردازیم. علاوه بر تعریف، مثال‌های متنوع و مهمی از گروه‌ها به‌ویژه

گروه‌های جایگشتی ارائه می‌شود. سپس مفهوم زیرگروه‌ها را به همراه مثال‌های متنوع از جمله زیرگروه‌های تولید شده توسط یک مجموعه ارائه خواهیم داد. در این راستا دسته خاصی از این زیرگروه‌ها به نام گروه‌های دوری معرفی می‌شوند و خواص آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند. در ادامه، با معرفی هم‌ریختی‌ها قدمی به سوی رده‌بندی گروه‌های دوری برمی‌داریم. بعد از آن به بیان قضیه مهمی که یکی از دلایل مطالعه گروه‌های متقارن است می‌پردازیم؛ قضیه کیلی ارتباط مستقیم نظریه گروه‌ها و گروه‌های جایگشتی را نشان می‌دهد. به منظور معرفی گروه‌های خارج قسمتی زیرگروه‌های خاصی از گروه‌ها به نام زیرگروه‌های نرمال را معرفی خواهیم نمود. برای این منظور ابتدا هم‌مجموعه‌ها و سپس ترکیب زیرمجموعه‌های یک گروه را معرفی و خواص آن‌ها را ارائه داده‌ایم. قضیه لاگرانژ یکی از اساسی‌ترین قضایای این قسمت است. در نهایت قضایای اساسی گروه‌ها را بیان و اثبات کرده و با کاربردهایی از آن‌ها آشنا می‌شویم.

قسمت سوم کتاب، شامل پنج فصل است. در فصل هجده به ارائه مفاهیم اولیه حلقه‌ها می‌پردازیم. به این صورت که در ابتدا مفهوم اولیه و ساختاری یک حلقه معرفی می‌شود و سپس در فصل نوزده خواص مقدماتی این ساختارهای جبری مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل بیست مشابه آنچه برای گروه‌ها انجام شد، مفهوم زیرحلقه را بیان می‌کنیم و بعد از مطرح کردن مطالبی در مورد زیرحلقه‌ها، به معرفی حالت خاصی از آن‌ها که به ایده‌آل‌ها معروف هستند می‌پردازیم. ملاحظه خواهیم کرد که این زیرحلقه‌های خاص، موجبات معرفی و ساختن حلقه‌های جدیدی از روی خود حلقه را فراهم خواهند آورد. فصل بیست و یک به معرفی حلقه‌های خارج قسمتی و مطالبی در مورد ایده‌آل‌های اول و ماکزیمال اختصاص یافته که نقش خیلی مهمی در نظریه حلقه‌ها را دارند. در فصل بیست و دو، ابتدا ساختار هم‌ریختی‌ها را در بین حلقه‌ها معرفی و به دنبال آن قضایای اساسی آن‌ها را بیان می‌کنیم. آخر این فصل و در حقیقت خاتمه کتاب حاضر، به معرفی مختصر حلقه‌های چندجمله‌ای اختصاص داده شده است.

مؤلفان این کتاب امیدوارند که مدرسین محترم دانشگاه پیام‌نور ما را از نظریات و پیشنهادات سازنده خود محروم نسازند. در آخر از جناب آقای دکتر سعید میروکیلی بابت نظرات ارزشمندشان تقدیر و تشکر می‌کنیم.

فصل اول

مقدمات و پیش‌نیازها

هدف کلی

در این فصل به ارائه مطالب پایه‌ای و مورد نیاز جهت مطالعه این کتاب می‌پردازیم. برخی از ویژگی‌های اساسی اعداد صحیح را یادآوری نموده و به معرفی مختصری از رابطه‌ها و مجموعه‌های به‌طور جزئی مرتب می‌پردازیم.

هدف‌های یادگیری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. اصل خوش‌ترتیبی را بیان کند.
۲. اصل استقراء ریاضی را بیان و ثابت کند.
۳. مراحل اثبات حکمی را به روش اصل استقراء ریاضی انجام دهد.
۴. مسایلی را به توسط استقراء ریاضی حل و ثابت کند.
۵. قضیه الگوریتم تقسیم را بیان و ثابت کند.
۶. قضیه بزو را بیان و ثابت کند.
۷. قضیه اساسی حساب را بیان و ثابت کند.
۸. یک رابطه هم‌ارزی را تعریف کند و تشخیص دهد که کدام رابطه داده شده هم‌ارزی است.

۹. یک مجموعه به طور جزئی مرتب را تعریف کند و تشخیص دهد که مجموعه داده شده آیا به طور جزئی مرتب است یا خیر؟
۱۰. لم ژرن را بیان نماید و بتواند در حل مسایل از آن استفاده کند.
۱۱. دیاگرام یک مجموعه به طور جزئی مرتب را رسم کند.
۱۲. قادر به حل تمرین‌های ستاره دار بدون ارجاع به حل آن‌ها باشد.
۱۳. قادر به حل تمرین‌های آخر هر بخش باشد.

مقدمه

در سراسر این کتاب از نمادهای $\mathbb{R}^{\geq 0}$ ، $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ ، $\mathbb{Z}^{\geq 0}$ به ترتیب برای نشان دادن مجموعه اعداد صحیح نامنفی، مجموعه اعداد گویای نامنفی و مجموعه اعداد حقیقی نامنفی استفاده خواهیم کرد. این فصل شامل پیش‌نیازهای فصل‌های آتی است که مطالعه آن بر حسب نیاز فراگیرنده است و در تدریس آن الزامی وجود ندارد.

۱-۱ اعداد صحیح

مجموعه اعداد صحیح^۱ یکی از ساختارهای جبری است که در مبحث جبر مجرد از مثال‌های متنوعی برخوردار است. می‌توان گفت که بسیاری از تجربه‌های جبری، از اعداد صحیح الهام گرفته شده‌اند. در این بخش از کتاب، خواص اساسی و معینی از اعداد صحیح را می‌آوریم که در فصل‌های مختلف کتاب از آن‌ها استفاده خواهند شد. به عنوان مثال، اگر m و n اعداد صحیح باشند به طوری که $n < m$ ، آنگاه عدد صحیح مثبتی مانند t وجود دارد به طوری که $m = n + t$. همچنین در این بخش برخی از ویژگی‌های مهم و کاربردی اعداد صحیح را مرور و در مواقعی آن‌ها را ثابت خواهیم کرد. اصل زیر به اصل خوش‌ترتیبی/اعداد صحیح مثبت معروف است و اثبات اغلب نتایج جبری به این اصل وابسته است.

۱-۱-۱ اصل خوش‌ترتیبی^۱. هر زیرمجموعهٔ ناتهی از $\mathbb{Z}^{\geq 0}$ دارای کوچک‌ترین عضو است. به عبارت دیگر، اگر $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{Z}^{\geq 0}$ ، آنگاه عضوی مانند $x \in S$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $y \in S$ خواهیم داشت $x \leq y$.
با استفاده از اصل خوش‌ترتیبی، خاصیت مهم دیگری از اعداد صحیح مثبت را به‌صورت زیر می‌توان به‌دست آورد.

۱-۱-۲ ملاحظه. فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Z}^{\geq 0}$ باشد به‌طوری‌که دارای دو ویژگی زیر است:

(الف) S شامل عضوی مانند n_0 است،

(ب) برای هر $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ که $n_0 \leq n$ ، اگر $n \in S$ آنگاه $n+1 \in S$.

در این صورت $\{n \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \mid n \geq n_0\} \subseteq S$.

خاصیت بالا از اعداد صحیح را اصل استقراء ریاضی می‌نامند و بنابراین قضیهٔ زیر که از دیگر ویژگی‌های اعداد صحیح است را می‌توان بیان کرد.

۱-۱-۳ قضیه (اصل استقراء ریاضی)^۲. فرض کنیم $S \subseteq \mathbb{Z}^{\geq 0}$ و $n_0 \in S$. همچنین فرض کنیم S حداقل در یکی از شرایط زیر صدق کند.

(الف) برای هر $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ که $n_0 \leq n$ ، اگر $n \in S$ آنگاه $n+1 \in S$.

(ب) برای هر $m, n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ که $m < n$ ، اگر $m \in S$ آنگاه $n \in S$.

در این صورت $\{n \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \mid n \geq n_0\} \subseteq S$.

در ملاحظه ۱.۱.۲ به‌طور ضمنی ثابت شد که قضیه ۱.۱.۳، در حالتی که مجموعه S در شرط (الف) صدق کند، برقرار است.

*۱-۱-۴ تمرین. قضیه ۱.۱.۳ را در حالتی که S در شرط (ب) صدق کند ثابت کنید.

۱-۱-۵ ملاحظه. گاهی از اصل استقراء ریاضی برای اثبات احکام و گزاره‌های مربوط به اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم و اصطلاح استقراء را در مورد آن‌ها به کار می‌بریم. در این‌گونه مسائل معمولاً چنین عمل می‌کنیم:

1. Well-Ordering Principle

2. Principle of Mathematical Induction

۱. ابتدا/استقراء. ابتدا حکمی که قرار است درستی آن ثابت شود را $S(n)$ می‌نامیم و عددی مانند $n_0 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ را چنان پیدا می‌کنیم به‌طوری‌که $S(n_0)$ درست باشد.

۲. فرض/استقراء. سپس فرض می‌کنیم n عدد صحیحی باشد که $n_0 \leq n$ و $S(n)$ درست باشد (یا عدد صحیح k چنان باشد که $n_0 \leq k \leq n$ و $S(k)$ درست باشد).

۳. مرحله حکم/استقراء. حال نشان می‌دهیم که $S(n+1)$ نیز درست است.

★ ۱-۱-۶ تمرین. با استفاده از استقراء نشان دهید برای هر عدد طبیعی n تساوی زیر برقرار است.

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۱-۱-۷ مثال. به کمک استقراء نشان می‌دهیم برای هر $3 \leq n$ ، رابطه $2n+1 \leq 2^n$ درست است.

حل. رابطه $2n+1 \leq 2^n$ را $S(n)$ می‌نامیم. ابتدا توجه شود که $S(3)$ درست است زیرا $2 \times 3 + 1 = 7 \leq 2^3 = 8$. حال فرض می‌کنیم $3 \leq n$ و $S(n)$ درست باشد. یعنی $2n+1 \leq 2^n$ (فرض استقراء). ثابت می‌کنیم $S(n+1)$ نیز درست است. می‌توان نوشت $2(n+1)+1 = 2n+2+1 = (2n+1)+2$. چون بنا بر فرض استقراء $S(n)$ درست است، خواهیم داشت

$$(2n+1)+2 \leq 2^n + 2 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

زیرا $3 \leq n$. در واقع با انتخاب $S = \{n \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \mid S(n) \text{ درست است}\}$ ، چون $3 \in S$ و در بالا ثابت شد اگر $3 \leq n$ و $n \in S$ ، آنگاه $n+1 \in S$ ؛ لذا بنابر قضیه ۱-

$$3-1 \text{ (اصل استقراء ریاضی) نتیجه می‌گیریم } \{n \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \mid n \geq 3\} \subseteq S \quad \square$$

در این قسمت با استفاده از اصل خوش‌ترتیبی قضیه مهم زیر را ثابت می‌کنیم که در نظریه اعداد و جبر مجرد کاربرد زیادی دارد.

۱-۱-۸ قضیه (الگوریتم تقسیم). فرض کنیم $x, y \in \mathbb{Z}$ و $y \neq 0$. در این صورت اعداد صحیح و یکتای q و r موجودند به‌طوری‌که $x = qy + r$ و $0 \leq r < |y|$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $0 < y$. در این صورت $1 \leq y$ مجموعه

$$S = \{x - uy \mid u \in \mathbb{Z}, x - uy \geq 0\}$$

را در نظر می‌گیریم. از این که $1 \leq y$ ، خواهیم داشت

$$x - (-|x|)y = x + |x|y \geq 0$$

و لذا $x - (-|x|)y \in S$. بنابراین $x - (-|x|)y \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. حال با توجه به اصل خوش‌ترتیبی، S دارای کوچک‌ترین عضو مانند r است. از این که $r \in S$ ، لذا $0 \leq r$ و به ازای عدد صحیح مانند $q \in \mathbb{Z}$ داریم $r = x - qy$. در این صورت $x = qy + r$. اینک نشان می‌دهیم $|y| < r$. فرض کنیم چنین نباشد، یعنی $r \geq |y| = y$ (فرض خلف). بنابراین می‌توان نوشت

$$x - (q+1)y = (x - qy) - y = r - y \geq 0.$$

در نتیجه $r - y \in S$ و این متناقض با کوچک‌ترین عضو بودن r در S است. پس فرض خلف باطل و باید داشته باشیم $|y| < r$. به این ترتیب حکم در حالت $0 < y$ برقرار است.

حال فرض کنیم $y < 0$. در این صورت $|y| < 0$. لذا با توجه به آنچه که در بالا ثابت شد، اعداد صحیح q' و r وجود دارند به‌طوری که $x = q'|y| + r$ و $0 \leq r < |y|$. از این که $y < 0$ ، پس $|y| = -y$ و $x = -q'y + r$. قرار می‌دهیم $q = -q'$. در این صورت $x = qy + r$ و $0 \leq r < |y|$ و لذا حکم در این حالت نیز به‌دست می‌آید. در انتها نشان می‌دهیم q و r یکتا هستند. فرض کنیم اعداد صحیح q' و r' نیز موجود باشند به‌طوری که داشته باشیم

$$x = qy + r = q'y + r',$$

$$0 \leq r' < |y|, \quad 0 \leq r < |y|.$$

بنابراین

$$r - r' = (q - q')y,$$

$$|r - r'| = |q - q'|y.$$

حال $0 \leq r < |y|$ و $0 \leq r' < |y|$. با جمع طرفین نامساوی‌ها به‌دست می‌آید

$$-|y| < r' - r < |y|.$$

به عبارت دیگر $|r' - r| < |y|$. حال از تساوی $|r - r'| = |q - q'|y$ نتیجه می‌شود $0 \leq q' - q < r$ چون $q' - q$ عددی صحیح است، باید $q' - q = 0$ و از این‌رو $|r' - r| = 0$. در نتیجه $q' = q$ و $r' = r$. $\square$

در قضیه ۱-۱-۸، q را خارج قسمت^۱ و r را باقی‌مانده تقسیم^۲ x بر y می‌نامیم و توجه شود که اگر $y < 0$ آنگاه $0 \leq r$.

۱-۱-۹ تعریف. فرض کنیم $x, y \in \mathbb{Z}$ و $x \neq 0$. اگر عدد صحیحی مانند q موجود باشد به طوری که $y = xq$ ، آنگاه x را یک مقسوم علیه^۳ y نامیم و می‌گوییم x عدد y را عادی^۴ می‌کند. در این حالت می‌نویسیم $x | y$. عدد صحیح غیرصفر c را یک مقسوم علیه مشترک^۵ x و y می‌نامیم هرگاه داشته باشیم $c | x$ و $c | y$. عدد صحیح ناصفر d را یک بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک^۶ x و y می‌نامیم هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشد.

(الف) $d | x$ و $d | y$.

(ب) برای هر $c \in \mathbb{Z}$ که $c | x$ و $c | y$ ، آنگاه $c | d$.

★ ۱-۱-۱۰ تمرین. نشان دهید که اگر d و d' هر دو بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک اعداد صحیح x و y باشند، آنگاه $d' = \pm d$.
با توجه به تمرین ۱. ۱. ۱۰، از اعداد d و d' ، آن عددی که مثبت باشد را به عنوان بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (x, y) انتخاب می‌کنیم. در این کتاب از نماد (x, y) (در بعضی کتب از نماد $\gcd(x, y)$) برای این منظور استفاده خواهیم کرد.
قضیه زیر نشان می‌دهد که بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح همواره وجود دارد.

۱-۱-۱۱ قضیه (قضیهٔ بزو^۷). فرض کنیم $x, y \in \mathbb{Z}$ و حداقل یکی از آن‌ها غیرصفر باشند. در این صورت x و y دارای بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک مثبتی مانند d هستند و به علاوه اعداد صحیح s و t موجودند به طوری که $d = sx + ty$.
برهان. به لم ۱-۳-۱ از کتاب هراشتاین [He] مراجعه شود. $\square$

1. Quotient
2. Remainder
3. Divisor
4. Divide
5. Common divisor
6. Greatest common divisor
7. Étienne Bézout