



انتگرال هار

تأليف

لئوپولدو ناچين

ترجمة

دکتر مهدی شمس

«عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه کاشان»

دکتر لیلا نصیری

«گروه ریاضی دانشگاه لرستان»

امروز کتابخوانی و علم‌آموزی نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.^۱

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتابخوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه مطالعه هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین سوره‌ای که بر آن فرستاده عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد

1. <https://farsi.khamenei.ir/message-content?id=2696>

شده است: «إِقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده اند.

دانشگاه پیام نور با گستره جغرافیایی ایران شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه جا و همه وقت، به عنوان دانشگاهی کتاب محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره گیری از تجربه های گرانقدر استادان و صاحب نظران برجسته کشورمان، کتاب ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه مهم و خطیر یاری رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه خطیر یاری می رسانند، سپاسگزاری می نمایم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام نور را منزلگاه اندیشه سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام نور

فهرست مطالب

هفت	پیشگفتار
۱	۱ انتگرال گیری روی فضاهای موضعاً فشرده
۱	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ انگیزه
۷	۳.۱ فضاهای فشرده
۱۰	۴.۱ فضاهای موضعاً فشرده
۱۲	۵.۱ فضاهای نرمال
۱۹	۶.۱ انتگرال های مثبت برای توابع پیوسته با محمل های فشرده
۲۵	۷.۱ توابع نیم پیوسته
۳۰	۸.۱ انتگرال های مثبت برای توابع انتگرال پذیر
۳۷	۹.۱ قضیه فاتو
۴۰	۱۰.۱ توابع پوچ و مجموعه های پوچ
۴۲	۱۱.۱ قضیه ی ریس-فیشر
۴۴	۱۲.۱ افرازهای واحد پیوسته
۴۶	۱۳.۱ فشردگی روی ضرب های دکارتی
۵۰	۱۴.۱ انتگرال گیری روی ضرب های دکارتی
۵۵	۲ انتگرال گیری روی گروه های موضعاً فشرده

۵۵	۱.۲ مقدمه
۵۸	۲.۲ انگیزه
۶۰	۳.۲ گروه‌های توپولوژیک
۷۰	۴.۲ انتگرال هار
۸۳	۵.۲ ویژگی‌های انتگرال هار
۱۰۴	۶.۲ انتگرال‌های نسبتاً ناورد
۱۰۸	۷.۲ ضرب‌های نیم مستقیم و نیم-دکارتی توپولوژیک
۱۱۳	۸.۲ اثبات وجود و یکتایی انتگرال هار بر اساس آندره ویل
۱۲۵	۹.۲ اثبات وجود و یکتایی انتگرال هار بر اساس هنری کارتان
۱۳۵	۳ انتگرال‌گیری روی فضاهاى همگن موضعاً فشرده
۱۳۵	۱.۳ مقدمه
۱۳۶	۲.۳ انگیزه
۱۴۱	۳.۳ فضاهاى همگن توپولوژیک
۱۵۰	۴.۳ شرایطی برای وجود و یکتایی انتگرال‌های ناورد و نسبتاً ناورد
۱۶۳	کتاب‌نامه
۱۶۷	واژه‌نامه
۱۷۱	نماد
۱۷۳	نمایه

پیشگفتار مؤلف

این کتاب شامل اصول مقدماتی انتگرال هار^۱ است و نویسنده (لئوپولد ناچبین^۲) در طول نیمسال دوم سال ۱۹۵۹ در دانشگاه‌های برزیل (ریودوژانیرو، گوانابارا) و هم‌چنین در موسسه‌ی فیزیک و ریاضی دانشگاه رزیفه (رزیفه، پرنامبوکو) این فرصت را به دست آورده است که مطالب این کتاب را جمع‌آوری کند.

این کتاب با رعایت این نکته که مستقل باشد نوشته شده است، پیش زمینه لازم برای خواننده فقط دانشی ابتدایی از انتگرال‌های لبگ^۳ و استیلتیس^۴ از جبر و توپولوژی عمومی است. در این مرحله آشنایی خواننده با آنالیز تابعی و اصول آن سودمند است، هم‌چنین در میان پیش‌نیازهای مقدماتی که ذکر می‌شود، مختصراً قضیه‌ی وجود و یکتایی انتگرال هار بررسی می‌شود. این قبیل اصولی که ارائه می‌شود، برای اثبات قضیه و نمایش ویژگی‌های مشخص آن و کاربردهایی که فوراً خودشان را نشان می‌دهند مطلقاً ضروری است و دانستن این اصول، روشی سازمان داده شده، ساده و جذاب است. خواننده بعد از مطالعه کامل این کتاب با توجه به تعدادی کاربرد اساسی آنالیز هارمونیک و انتگرال هندسی می‌تواند مطابق با میل خود، یک آنالیزدان یا یک هندسه‌دان را انتخاب کند. حتی اگر شخصی تمایل به انجام این کار را داشته باشد، نویسنده نمی‌تواند از ایده‌های بورباکی^۵، هنری کارتان^۶ و ویل^۷ چشم پوشی کند، آنها کلاسیک بوده‌اند و در اینجا نظریات این افراد را به دلیل گرایش‌های دیگری که در متن‌های علمی راجع به این موضوع مطرح شده است، ارائه می‌کنیم، زیرا این مباحث بیشتر به مذاق شخصی نویسندگان منطبق است. یک کتاب زمانی موفق خواهد بود که هدفمند باشد و توانایی برانگیختن علاقه‌ی خواننده به روش‌های زیبای آنالیز تابعی اما با نگاهی خاص به کاربردهای آن را داشته باشد. این کتاب می‌کوشد که با مثال توضیح دهد و نتایج را با چندین مثال مختلف به دست می‌آورد که متأسفانه

1. Harr

2. Leopoldo Nachbin

3. Lebesgue

4. Stieltjes

5. Bourbaki

6. Henri Cartan

7. Weil

زمان کافی برای فهرستی کامل از مسائل را ندارد. نویسنده از پروفیسور آلفردو پیرا گومز^۱ برای انتشار این درس در مجموعه‌ی "متون ریاضی" تشکر می‌کند. هم‌چنین از آقای لوئیز آداوتو دا جاستا مدیروس^۲ از دانشگاه برزیل و آقای سیلویو ماچادو^۳ از دانشگاه ریو گراند تشکر می‌کنم، این افراد گروهی بودند که مقدمات ویرایش و نوشتن دروس و متناسب‌سازی آنها را در این کتاب بر عهده داشته‌اند.

لئوپولدو ناچبین

دانشگاه رزیفه

رزیفه، پرنامبوکو

نوامبر ۱۹۵۹

1. Alfredo Pereira Gomes

2. Luiz Adauto da Justa Medeiros

3. Silvio Machado

پیشگفتار مترجمان

عبارت "همانگ‌ها" (به انگلیسی *harmonics*) از ریشه یونانی *harmonikos* به معنای "ماهر در موسیقی" گرفته شده است. در علم موسیقی، فرکانس همانگ‌های یک نُت موسیقایی، ضرایب صحیحی از فرکانس نُت پایه (پایین‌ترین فرکانسی که می‌توان از یک لوله صوتی تولید کرد) هست. آلات موسیقی می‌توانند هارمونیک‌ها را در انواع مختلفی از زیر و بم‌های اصلی اجرا کنند. در هارمونیک‌ها، گام‌های موسیقی معمولاً گام‌های ترکیبی (ترکیبی از چندین فرکانس) هستند.

آنالیز ریاضی شامل دو شاخه اصلی به نام‌های آنالیز تابعی و آنالیز هارمونیک است. آنالیز هارمونیک شاخه‌ای از ریاضیات است که مرتبط با نمایش توابع یا سیگنال‌ها به صورت برآیندی از امواج پایه بوده و به مطالعه و نمایش مفاهیم سری‌های فوریه و تبدیل فوریه می‌پردازد و در دو قرن اخیر، به شاخه‌ای وسیع تبدیل شده که کاربردهای گسترده‌ای در نظریه اعداد، نظریه نمایش، پردازش سیگنال، مکانیک کوانتومی، فشرده‌سازی دیسک‌ها و عکس‌ها در کامپیوتر، هوش مصنوعی (خوشه‌بندی، فشرده‌سازی، بهینه‌سازی و بازیابی اطلاعات) و پرتونگاری در پزشکی و شاخه‌های دیگر علم دارد. تاریخچه این علم به مطالعات ژوزف فوریه (۱۸۰۷) در جریان کشف حل معادله گرما بر می‌گردد که توابع با مقادیر حقیقی به صورت ترکیب خطی از توابع مثلثاتی تجزیه می‌شوند. در تحلیل موجک بر خلاف آنالیز فوریه که زمان یا مکان به فرکانس تصویر می‌شوند، ترکیب هر دو به صورت تطبیقی در نظر گرفته می‌شود.

آنالیز هارمونیک به بحث‌های متنوعی می‌پردازد که در کتاب حاضر به عمل روی گروه‌های موضعاً فشرده پرداخته می‌شود. پایه اصلی آنالیز هارمونیک شناخت گروه‌های توپولوژیک هست که این گروه‌ها اولین بار توسط شرایر در سال ۱۹۲۶ تعریف شد. هر چند اساس این گروه‌ها به مطالعات کلاین در زمینه مفاهیم هندسی از طریق گروه تبدیل‌های متناظر با آنها بر می‌گردد. گروه‌های کلاسیک در هندسه (گروه‌های خطی عمومی، گروه‌های یکانی و ...) همگی گروه‌های لی هستند. در متن کتاب در مورد ادامه تحقیقات منتهی به پیشرفت و توسعه این دانش صحبت شده است. بنابراین به زبان ساده آنالیز هارمونیک، مطالعه اشیاء (توابع، اندازه‌ها و ...) تعریف شده روی گروه‌های توپولوژیک است.

هدف این کتاب آشنایی دانشجویان رشته ریاضی با مفاهیم آنالیز هارمونیک به ویژه انتگرال هار است و می‌تواند به عنوان یک کتاب درسی در مقطع کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری رشته ریاضی تدریس شود. در پایان از زحمات سرکار خانم دکتر نسرين برقي اسکوئي که بازخوانی و ویرایش کتاب را انجام داده‌اند تشکر و قدردانی می‌شود و از استادان و دانشجویان ارجمند خواهشمند است ما را در بهتر شدن کتاب یاری کرده و در صورتی که پیشنهاد یا انتقادی به کتاب دارند با ایمیل mehdishams@kashanu.ac.ir در تماس باشند.

دکتر لیلا نصیری، گروه ریاضی دانشگاه لرستان

دکتر مهدی شمس، عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه کاشان

پاییز ۱۴۰۱

تقدیم بہ:

پدر و مادر عزیزم

لیلا نصیری

روح پاک مادرم، پدر بزرگوارم و ہمسر مہربانم

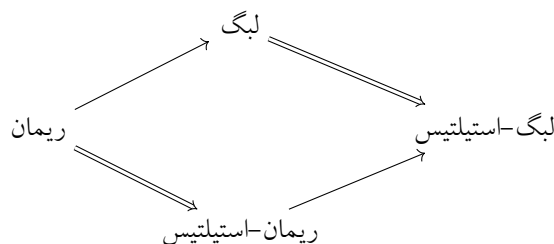
مہدی شمس

فصل اول

انتگرال گیری روی فضاهاى موضوعاً فشرده

۱.۱ مقدمه

در دوره‌های درسی عمومی در آنالیز، ابتدا انتگرال ریمان^۱ و سپس توسیع آن به انتگرال لبگ مطالعه می‌شود. در عین حال، انتگرال ریمان را می‌توان به انتگرال ریمان-استیلتیس تعمیم داد که می‌تواند به انتگرال لبگ-استیلتیس گسترش یابد که یک تعمیم از انتگرال لبگ است. بنابراین نمودار زیر را داریم:



در شکل بالا، پیکان‌های تک نشان دهنده‌ی فرایند توسیع (گسترش) هستند و پیکان‌های دوتایی فرایند تعمیم را نشان می‌دهند. این روش‌های انتگرال‌گیری برای یک یا چند متغیر حقیقی مورد مطالعه قرار می‌گیرند. از طرف دیگر، کاربردهای هندسی و تحلیلی به تشکیل انتگرال‌گیری از توابع روی خمینه‌های مشتق‌پذیر یا به صورت عمومی‌تر، روی مجموعه‌هایی که به عنوان ابعاد نامتناهی رده‌بندی شده‌اند، منجر می‌شوند. این حقیقت، یک ایده برای ساختن یک نظریه‌ی عمومی انتگرال‌گیری برای توابعی که روی مجموعه‌هایی که انتگرال‌گیری روی آنها مجاز است ارائه می‌دهد، یعنی مجموعه‌هایی که امکان توسعه چنین نظریه‌ای در آنها وجود داشته باشد.

در نمایش امروزی نظریه‌ی انتگرال‌گیری، با معضل انتخاب بین دو نوع انتگرال‌گیری روی فضاهای موضعاً فشرده و انتگرال‌گیری مجرد مواجه هستیم. این معرفی ممکن است یک فرد مبتدی را گمراه کند و به او این احساس را منتقل کند که دیدگاه دوم مجردتر است، در حالی که این وضعیت در واقع خیلی ساده نیست. این که نظریه‌ی اول یک حالت خاص از دومی است واضح است: در نظریه‌ی انتگرال‌گیری روی فضاهای موضعاً فشرده، انتگرال‌گیری روی توابعی انجام می‌شود که روی مجموعه‌هایی که دارای توپولوژی هستند تعریف شده و فضا موضعاً فشرده خواهد بود. در صورتی که در نظریه‌ی انتگرال‌گیری مجرد، انتگرال‌گیری روی توابعی انجام می‌شود که این توابع روی یک مجموعه تعریف می‌شود که به طور پیش فرض روی آن هیچ توپولوژی داده نشده است. از طرف دیگر کاکوتانی^۱ نشان داد دیدگاه انتگرال‌گیری مجرد به انتگرال‌گیری روی فضاهای موضعاً فشرده تقلیل پیدا می‌کند و لذا هر دو دیدگاه با هم معادل هستند. در این کتاب قصد نداریم که در مورد نظریه‌ی انتگرال‌گیری بحث کنیم. با توجه به بحث بالا این کار ضرورتی ندارد. مرجع اصلی در مورد انتگرال‌گیری روی فضاهای موضعاً فشرده کتابی با موضوع انتگرال‌گیری است که توسط بورباکی نوشته شده است. بهترین کتاب در مورد انتگرال‌گیری مجرد، کتاب‌های ساکس^۲، هوف^۳، هالموس^۴، ریس-ناگی^۵ و لومیس^۶ هستند که این نام‌ها به ترتیب زمان آورده شده‌اند.

در فصل بعدی، مقدمه‌ای برای انتگرال‌گیری روی فضاهای موضعاً فشرده آورده می‌شود که این مطالب مطابق با دیدگاه بورباکی است. این رویکرد زمانی که بخواهیم از نظریه‌ی انتگرال‌گیری به نظریه‌ی توزیع‌ها از لارنت شوارتز^۷ برویم، دارای مزایایی زیادی هست. اگر چه مطالب ارائه شده به طور منطقی یکپارچه هستند، مطالب را به ناچار در فصل‌های دوم و سوم ادامه می‌دهیم. بنابراین فصل اول به اندازه‌ی کافی شامل خلاصه‌ای از مفاهیم نظریه‌ی انتگرال‌گیری نیست. برخی از مباحث ضروری در دوره‌های آموزشی انتگرال‌گیری، مانند قضیه‌ی لبگ، قضیه‌ی لبگ-فوبینی^۸ لبگ-نیکودیم^۹، انتگرال‌گیری روی ضرب‌های دکارتی نامتناهی و انتگرال‌گیری از توابع با مقادیر برداری حذف شده است.

1. Kakutani

2. Saks

3. Hopf

4. Halmos

5. Riesz-Nagy

6. Loomis

7. Laurent Schwartz

8. Fubini

9. Nikodym

۲.۱ انگیزه

به منظور ایجاد انگیزه برای دیدگاهی که بورباکی ارائه داد، از مفهوم شناخته شده‌ی انتگرال ریمان-استیلتیس آغاز می‌کنیم. برای سادگی خودمان را به توابع حقیقی یک متغیره محدود می‌کنیم، این مورد محدود شده هنوز یک انگیزه به اندازه‌ی کافی قوی برای دیدگاه ما ایجاد می‌کند. چون اثبات حقایقی که در این بخش آمده است برای کامل کردن بقیه متن ضروری نیست، به ارائه‌ی این اثبات‌ها نمی‌پردازیم.

قضیه‌ی ریس را برای بازه‌ی فشرده‌ی $I = [a, b]$ از خط اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ معرفی می‌کنیم. فرض کنیم f و α دو تابع با مقادیر حقیقی روی I باشند. انتگرال ریمان-استیلتیس تابع f نسبت به α توسط

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})),$$

تعریف شده است، که در آن $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b$ و حد به عنوان طول ماکزیمم

$$\Delta = \max\{x_i - x_{i-1}; 1 \leq i \leq n\}$$

از بازه‌هایی که I به زیربازه‌هایی تقسیم شده در نظر گرفته شده است و به صفر میل می‌کند. مقدماتی‌ترین قضیه‌ی وجودی مربوط به این انتگرال قضیه‌ای است که بیان می‌کند $\int_a^b f d\alpha$ موجود است، هرگاه f پیوسته و α با تغییر کران‌دار باشد؛ این مطلب بیان می‌کند که تغییر کلی که توسط

$$Vt(\alpha) = \sup \sum_{i=1}^n |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})|$$

تعریف شده متناهی باشد؛ سوپریم با توجه به تمام دنباله‌های متناهی به طوری که

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$$

در نظر گرفته شده است. به ویژه، این انتگرال وجود دارد در صورتی که f پیوسته و α صعودی باشد. با این حال، این حالت خاص به طور اساسی با حالت قبلی معادل است، چون طبق یک قضیه از ژوردان^۱ هر تابع با تغییر کران‌دار را می‌توان به صورت تفاضل دو تابع صعودی نوشت. فضای برداری تشکیل شده از توابع پیوسته با مقادیر حقیقی روی I را توسط $\mathcal{C}(I)$ تعریف

می‌کنیم. هر تابع با مقادیر حقیقی α که روی I تعریف شده و با تغییر کران‌دار باشد یک تابع خطی μ تعیین می‌کند که روی فضای برداری $\mathcal{C}(I)$ با ضابطه‌ی

$$\mu(f) = \int_a^b f d\alpha \quad (1.1)$$

است که در آن $f \in \mathcal{C}(I)$.

طبق تعریف فرایند انتگرال ریمان-استیلتیس روی I یک تابع خطی μ روی $\mathcal{C}(I)$ است که می‌تواند توسط یک انتگرال ریمان-استیلتیس نشان داده شود، یعنی، یک تابع با مقادیر حقیقی α با تغییر کران‌دار روی I وجود دارد به طوری که رابطه‌ی (۱.۱) برقرار می‌شود. قضیه‌ی ریس فرایندهای انتگرال ریمان-استیلتیس را مشخص می‌کنند که به توابع α متناظر می‌شوند که توابعی با تغییر کران‌دار یا صعودی هستند.

تابع خطی μ روی $\mathcal{C}(I)$ مثبت نامیده می‌شود، اگر $f \in \mathcal{C}(I)$ و برای $f \geq 0$ نتیجه بگیریم $\mu(f) \geq 0$.

قضیه ۱.۲.۱. (ریس) فرض کنیم μ یک تابع خطی روی فضای برداری $\mathcal{C}(I)$ باشد. یک تابع صعودی با مقادیر حقیقی α روی I وجود دارد به طوری که رابطه‌ی (۱.۱) برقرار است اگر و تنها اگر μ مثبت باشد.

بنابراین فرایندهای انتگرال ریمان-استیلتیس نسبت به توابع صعودی با تابعهای خطی مثبت روی $\mathcal{C}(I)$ منطبق می‌شوند.

فضای برداری $\mathcal{C}(I)$ یک فضای باناخ^۱ است که نرم آن به روش طبیعی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in I\}.$$

لذا می‌توانیم از تابعهای خطی μ روی $\mathcal{C}(I)$ به عنوان توابعی که نسبت به این نرم پیوسته هستند صحبت کنیم.

قضیه ۲.۲.۱. (ریس) فرض کنیم μ یک تابع خطی روی فضای برداری $\mathcal{C}(I)$ باشد. یک تابع با مقادیر حقیقی α روی I با تغییر کران‌دار وجود دارد به طوری که رابطه‌ی (۱.۱) برقرار است اگر و تنها اگر μ پیوسته باشد.

بنابراین فرایندهای انتگرال ریمان-استیلتیس نسبت به توابع با تغییر کران‌دار با تابعهای خطی پیوسته روی $\mathcal{C}(I)$ منطبق می‌شوند.

مقایسه حکم‌های پیشین به این نتیجه منجر می‌شود که هر تابع خطی مثبت روی $\mathcal{C}(I)$ باید پیوسته باشد، این نتیجه نه تنها درست است بلکه به طور مستقیم ثابت می‌شود. علاوه بر این، قضیه‌ی ژوردان که قبلاً بیان شد، وقتی که دو حکم مورد نظر را به کار می‌گیریم، نشان می‌دهد که هر تابع خطی پیوسته روی $\mathcal{C}(I)$ می‌تواند به عنوان تفاضل دو تابع خطی مثبت نوشته شود، این حقیقت ممکن است به طور مستقیم ثابت شود و در نظریه‌ی انتگرال مهم است.

اگر به جای انتگرال گیری روی یک بازه‌ی فشرده‌ی روی خط اعداد حقیقی انتگرال بگیریم، جنبه‌هایی که توسط دو قضیه‌ی ریس بیان شده است را در نظر می‌گیریم. همان گونه که به راحتی بررسی شده است، اثبات‌های مربوطه نتایج ساده‌ای از حالت‌های قبلی هستند. اختلاف بین یک بازه‌ی فشرده و خط اعداد حقیقی منعکس کننده اختلاف بین فضاهاى فشرده و فضاهاى موضعاً فشرده است که درباره هر دوی آنها بعداً بحث خواهیم کرد.

فرض کنیم f و α دو تابع با مقادیر حقیقی روی خط اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشند. فرض کنیم f روی $\mathbb{R}$ پیوسته و α روی هر بازه‌ی فشرده‌ی $[a, b]$ از $\mathbb{R}$ با تغییر کران‌دار باشد. بنابراین انتگرال $\int_a^b f d\alpha$ وجود دارد و بر اساس تعریف معمولی،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f d\alpha = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f d\alpha,$$

به شرط این که حد نشان داده شده وجود داشته باشد که البته این حد به رفتار f در بی‌نهایت بستگی دارد و α ثابت فرض شده است. به منظور بحث کامل مربوط به رفتار تابع f در بی‌نهایت در ساده‌ترین حالت که وجود حد بالا را ضمانت می‌کند، فرض کنیم یک بازه‌ی فشرده وجود داشته باشد به طوری که بیرون f صفر می‌شود.

فضای برداری تشکیل شده از توابع پیوسته با مقادیر حقیقی که روی $\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند به طوری که هر تابع بیرون یک بازه‌ی فشرده که از یک تابع به تابع دیگر تغییر می‌کند صفر می‌شود را توسط $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ تعریف می‌کنیم.

تابع‌های خطی μ روی $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ توسط یک انتگرال از نوع بالا می‌توانند توسط

$$\mu(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f d\alpha \quad (2.1)$$

بیان شوند که در آن $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ و α روی هر بازه‌ی فشرده از $\mathbb{R}$ یا صعودی یا با تغییر کران‌دار است، بنابراین وجود انتگرال در رابطه‌ی (۲.۱) تضمین شده است.

با گفتن این حقیقت که تابع خطی μ مثبت است اگر برای $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ و از این که $f \geq 0$ نتیجه بگیریم $\mu(f) \geq 0$ ، می‌توانیم تعریفی که قبلاً برای $\mathcal{C}(I)$ ساخته شده را برای

$\mathcal{K}(\mathbb{R})$ تکرار کنیم.

قضیه ۳.۲.۱. (ریس) فرض کنیم μ یک تابع خطی روی فضای برداری $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ باشد. یک تابع صعودی با مقادیر حقیقی α روی $\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که در رابطه‌ی (۲.۱) صدق می‌کند اگر و تنها اگر μ مثبت باشد.

متناظر با تعریف نرم برای $\mathcal{E}(I)$ ، می‌توانیم یک نرم روی فضای برداری $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}\}.$$

با این حال، یک تفاوت اساسی بین دو فضای برداری وجود دارد. در واقع، $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ یک فضای باناخ نیست؛ یعنی، نسبت به متری که توسط نرم مذکور تعریف شده کامل نیست. به سادگی از این حقیقت نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ یک زیرفضای سره و چگال از فضای برداری تشکیل شده از تمام توابعی است که روی $\mathbb{R}$ پیوسته و با مقادیر حقیقی هستند و در بی‌نهایت به صفر میل می‌کنند. همچنین، نرم روی این فضای برداری توسط عبارت بالا بیان شده است.

این حقیقت که $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ نسبت به نرم بالا کامل نیست وقتی که سعی می‌کنیم قضیه‌ی ریس را بیان کنیم کمی دشوار به نظر می‌رسد. اگر تابع خطی μ روی $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ پیوسته باشد، آن‌گاه این قضیه رد می‌شود. اگر نسبت به نرم مشخص شده پیوسته باشد، این یک تعریف مناسب نیست. تعریف مناسب پیوستگی به صورت زیر توسعه یافته است. برای هر بازه‌ی فشرده‌ی K از خط اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ ، زیرفضای برداری از $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ که از توابع پیوسته با مقادیر حقیقی که روی $\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند و بیرون K صفر می‌شوند تشکیل شده‌اند را توسط $\mathcal{K}(\mathbb{R}, K)$ تعریف می‌کنیم. به ویژه، نرم مشخص شده در فضای برداری $\mathcal{K}(\mathbb{R}, K)$ معنی‌دار است و بلافاصله مشاهده می‌شود که $\mathcal{K}(\mathbb{R}, K)$ یک فضای باناخ است. بنابراین μ پیوسته است اگر نسبت به نرم نشان داده شده روی هر زیرفضای برداری $\mathcal{K}(\mathbb{R}, K)$ که در آن K هر بازه‌ی فشرده از $\mathbb{R}$ است پیوسته باشد.

قضیه ۴.۲.۱. (ریس) فرض کنیم μ یک تابع خطی روی فضای برداری $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ باشد. یک تابع با مقادیر حقیقی α روی $\mathbb{R}$ وجود دارد که روی هر بازه‌ی فشرده از $\mathbb{R}$ با تغییر کران‌دار است، به طوری که در رابطه‌ی (۲.۱) صدق می‌کند، اگر و تنها اگر μ پیوسته باشد.

بخاطر کامل بودن، چهار صورت از قضیه‌ی ریس را بیان می‌کنیم. از آنجایی که بحث را به انتگرال‌های مثبت محدود می‌کنیم تنها اولین و سومین حالت از قضیه‌ی ریس بررسی می‌شود. ذکر این نکته ضروری است که نوع پیوستگی برای چهارمین حالت متعلق به مطالعه‌ی حدهای استقرایی در فضاهای برداری توپولوژیک از دیدگاه دیه‌دونه^۱-شوارتز مناسب است.

فضایای پیشین که توسط کار هادامارد^۱ پیشنهاد شدند و مباحثی از ریاضیات که در سال ۱۹۰۰ مطرح شده سرچشمه‌ی تحول در ایده‌های اساسی در آنالیز تابعی شد. اثبات‌هایی که توسط ریس برای این فضاها در سال ۱۹۰۹ ارائه شده یک گام مهمی را بنا می‌کند. بعد از کار رادون^۲ و دیگران، این گام یک تغییر نسبت به بنیان‌گذاری نظریه‌ی انتگرال‌گیری مشخص کرد که زیباترین آنها در کارهای کارتان، ویل و بورباکی مشاهده می‌شود. به عنوان یک واقعیت، فضایای ریس که قبلاً معرفی کردیم، نشان می‌دهد که هیچ تفاوتی بین این حقایق نیست که نقطه‌ی اصلی دیدگاه استیلتیس را دنبال کنیم، یا تعمیم انتگرال ریمان توسط جایگزین کردن تابع x با تابع α که صعودی یا با تغییر کران‌دار است، و یا این که تعریف استیلتیس را کنار گذاشته و توجه خود را روی α معطوف نکنیم، بلکه به جای آن تابع خطی پیوسته یا مثبت μ را در نظر بگیریم. همان طور که مشاهده کردیم، دیدگاه دوم، ساده‌تر و راحت‌تر اثبات می‌شود. بنابراین یک انتگرال مثبت روی I به عنوان یک تابع خطی مثبت روی $\mathcal{C}(I)$ و یک انتگرال روی I به عنوان یک تابع خطی پیوسته روی $\mathcal{C}(I)$ تعریف شده‌اند؛ این مطالب را برای $\mathbb{R}$ و $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ نیز به کار می‌گیریم.

۳.۱ فضاهاى فشرده

فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک E باشد، یعنی $X \subseteq E$. گردایه‌ی $\{V_i\}_{i \in I}$ از زیرمجموعه‌های باز E را یک پوشش باز برای X نامیم، در صورتی که داشته باشیم $X \subseteq \bigcup_i \{V_i\}$. به ویژه، توجه کنیم که اگر $E = \bigcup_i \{V_i\}$ ، این گردایه یک پوشش باز برای E است. یک پوشش متناهی نامیده می‌شود، اگر مجموعه‌ی اندیس‌گذار آن یعنی I متناهی باشد. برای هر زیرمجموعه‌ی J از I زیرگردایه‌ی $\{V_j\}_{j \in J}$ از گردایه‌ی $\{V_i\}_{i \in I}$ یک زیرپوشش باز برای X نامیده می‌شود، اگر یک پوشش باز از X باشد.

فضای هاسدورف^۳ E را فشرده نامیم، اگر هر پوشش باز E دارای یک زیرپوشش متناهی باشد؛ به عبارت دیگر، هرگاه $\{V_i\}_{i \in I}$ یک پوشش باز دلخواه از E باشد، یعنی $E = \bigcup_i \{V_i\}$ ، آن‌گاه اندیس‌های متناهی $i_1, \dots, i_n \in I$ وجود داشته باشند به طوری که $E = V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$. این مطلب معمولاً بیان می‌کند که فضای هاسدورف E دارای خاصیت بول-لبگ^۴ است.

حالت کلی‌تر، زیرمجموعه‌ی X از فضای هاسدورف E را فشرده نامیم، هرگاه X با توپولوژی القاء شده فشرده باشد. بلافاصله مشاهده می‌شود که زیرمجموعه‌ی X از E فشرده خواهد بود اگر و تنها اگر هر پوشش X از مجموعه‌های باز E دارای یک زیرپوشش متناهی باشد.

1. Hadamard

2. Radon

3. Hausdorff

4. Borel

زیرمجموعه‌ی E را نسبتاً فشرده نامیم، هرگاه بستارش فشرده باشد. قضیه‌ی کلاسیک بولتسانو-وایرشتراس^۱ تضمین می‌کند که در فضای اقلیدسی n -بعدی $\mathbb{R}^n$ زیرمجموعه‌های فشرده، همان مجموعه‌های بسته و کران‌دار و زیرمجموعه‌های نسبتاً فشرده، فقط مجموعه‌های کران‌دار هستند.

بدیهی است که هر زیرمجموعه‌ی متناهی از یک فضای هاسدورف فشرده است. واضح است که هر اجتماع متناهی از زیرمجموعه‌های فشرده، فشرده است؛ این عبارت برای زیرمجموعه‌های نسبتاً فشرده نیز درست است.

گزاره ۱.۳.۱. اگر X و Y دو زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی مجزا از فضای هاسدورف E باشند، آن‌گاه دو زیرمجموعه‌ی باز مجزا مانند V و W وجود دارند به طوری که $Y \subset W$ و $X \subset V$.

برهان. چون فضا هاسدورف است، گزاره برای دو نقطه‌ی مجزا درست است. هم‌اکنون گزاره را برای حالتی که X دلخواه و $Y = \{y\}$ باشد ثابت می‌کنیم. فرض کنیم x نقطه‌ی دلخواهی از X باشد، بنابراین $x \neq y$ چون فضا هاسدورف است دو مجموعه‌ی باز مجزا مانند V_x و W_y وجود دارند به طوری که $x \in V_x$ و $y \in W_y$. واضح است که گردایه‌ی $\{V_x\}_{x \in X}$ یک پوشش باز X از مجموعه‌های باز E است. از این که X فشرده است، نقاط $x_1, \dots, x_n$ از X وجود دارند به طوری که $X \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$. قرار می‌دهیم $V = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$ و $W = W_y \cap \dots \cap W_{x_n}$. واضح است که V و W دو مجموعه‌ی باز مجزا هستند به طوری که $X \subset V$ و $y \in W$.

سرانجام نشان می‌دهیم که گزاره برای حالتی که X و Y دو زیرمجموعه‌ی دلخواه باشند درست است. y را عضو دلخواهی از Y بگیریم، حالت قبلی را برای X و y به کار ببرید. بنابراین، دو زیرمجموعه‌ی باز مجزا V_y و W_y وجود دارند به طوری که $X \subset V_y$ و $y \in W_y$. بدیهی است که گردایه‌ی $\{W_y\}_{y \in Y}$ یک پوشش باز Y از مجموعه‌های باز E است. چون Y فشرده است نقاط $y_1, \dots, y_p$ از Y وجود دارند به طوری که $Y \subset W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_p}$. قرار می‌دهیم $V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_p}$ و $W = W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_p}$. به سهولت دیده می‌شود که V و W دو زیرمجموعه‌ی باز مجزا هستند که $X \subset V$ و $Y \subset W$. $\square$

گزاره ۲.۳.۱. زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی X از فضای هاسدورف E بسته است.

برهان. فرض کنیم y نقطه‌ی دلخواهی از $E - X$ باشد. با به کارگیری گزاره‌ی ۱.۳.۱ برای دو مجموعه‌ی X و $Y = \{y\}$ ، زیرمجموعه‌ی باز W شامل y را به دست می‌آوریم به طوری که X و W مجزا هستند؛ از این رو X بسته است. $\square$

گزاره ۳.۳.۱. زیرمجموعه‌ی X از فضای فشرده‌ی E ، فشرده است اگر و تنها اگر بسته باشد.

برهان. ابتدا فرض کنیم X بسته باشد. اگر گردایه‌ی $\{V_i\}_i$ پوششی باز از X باشد، بدیهی است که گردایه‌ی $\{V_i \cap X^C\}_i$ پوششی باز از E است، یعنی، $E \subset \cup_i \{V_i \cap X^C\}$. از آنجایی که E فشرده است گردایه‌ی متناهی $\{\{V_1 \cap X^C\}, \dots, \{V_n \cap X^C\}\}$ وجود دارد به طوری که $E \subset \cup_{i=1}^n \{V_i \cap X^C\}$ ، بنابراین X فشرده است.

برعکس، فرض کنیم X فشرده باشد. بنابر گزاره‌ی ۲.۳.۱، X بسته است. بنابراین حکم ثابت شده است. $\square$

به ویژه، در یک فضای هاسدورف اشتراک یک مجموعه‌ی بسته با یک مجموعه‌ی فشرده، فشرده است. بنابراین اشتراک یک خانواده‌ی ناتهی از مجموعه‌های فشرده، فشرده است. علاوه بر این، یک زیرمجموعه‌ی دلخواه از یک مجموعه‌ی نسبتاً فشرده، نیز نسبتاً فشرده است.

گزاره ۴.۳.۱. اگر E و F دو فضای هاسدورف و $f: E \rightarrow F$ یک نگاشت پیوسته باشد، آنگاه برای هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی X از E ، $f(X)$ یک زیرمجموعه‌ی فشرده از F است. (به عبارت دیگر، تصویر هر زیرمجموعه‌ی فشرده توسط تابع پیوسته، زیرمجموعه‌ای فشرده است.)

برهان. فرض کنیم $\{W_i\}_{i \in I}$ یک پوشش باز از $f(X)$ باشد، آنگاه طبق پیوستگی f نتیجه می‌گیریم که $\{f^{-1}\{W_i\}\}$ یک پوشش باز از X است. فشردگی X نتیجه می‌دهد که X دارای یک زیرپوشش متناهی است، بنابراین $f(X)$ دارای یک زیرپوشش متناهی است. این حقیقت فشردگی $f(X)$ را ثابت می‌کند. $\square$

نتیجه ۵.۳.۱. فرض کنیم E یک فضای فشرده و $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته با مقادیر حقیقی باشد، در این صورت f کران‌دار است و اکسترمم دارد.

برهان. طبق گزاره‌ی ۴.۳.۱، $f(E)$ یک زیرمجموعه‌ی فشرده از $\mathbb{R}$ است و از این رو $f(E)$ کران‌دار است. بنابراین f کران‌دار است. علاوه بر این، چون $f(E)$ یک زیرمجموعه کران‌دار و بسته از $\mathbb{R}$ است، لذا اینفیموم $f(E)$ متعلق به $f(E)$ است، یعنی، یک $a \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in E$ ، $f(a) \leq f(x)$. بنابراین f مینیمم مقدار خود را در یک نقطه از E می‌گیرد. به روش مشابه، می‌توان ثابت کرد که f ماکزیمم مقدار خود را در نقطه‌ای از E اختیار می‌کند. $\square$

گزاره ۶.۳.۱. (پیوستگی یکنواخت هاینه-لبورل) اگر f یک تابع پیوسته با مقادیر حقیقی روی

فضای فشرده‌ی E باشد، آن‌گاه برای هر $\varepsilon > 0$ پوشش باز متناهی $\{V_i\}_i$ از E وجود دارد به طوری که اگر برای یک $i, x, x' \in V_i$ آن‌گاه $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$.

برهان. اگر $t \in E$ آن‌گاه همسایگی باز U_t از t وجود دارد به طوری که اگر $x \in U_t$ آن‌گاه $|f(x) - f(t)| \leq \varepsilon/2$. بنابراین برای $x, x' \in U_t$ داریم:

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f(t)| + |f(x') - f(t)| \leq \varepsilon.$$

از این که E فشرده است، اعداد $t_1, \dots, t_n \in E$ را می‌توانیم پیدا کنیم به طوری که $\{U_{t_i}\}$ یک پوشش باز از E باشد. اکنون قرار می‌دهیم $V_i = U_{t_i}$. این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

۴.۱ فضاهای موضعاً فشرده

فضای هاسدورف E را موضعاً فشرده نامیم، هرگاه به ازای هر x از E حداقل یک همسایگی فشرده‌ی مانند U وجود داشته باشد به طوری که $x \in U \subseteq E$.

هر فضای فشرده، موضعاً فشرده است، چون خود فضا یک همسایگی فشرده از هر نقطه‌ی آن است. با این حال، عکس آن لزوماً درست نیست. به عنوان مثال، فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ فشرده نیست اما موضعاً فشرده است، چون برای هر نقطه‌ی x از $\mathbb{R}$ همسایگی فشرده‌ی $[x - h, x + h]$ که در آن $h > 0$ وجود دارد به طوری که $x \in [x - h, x + h] \subseteq \mathbb{R}$ به روش مشابه فضای $\mathbb{R}^n$ موضعاً فشرده است، اما فشرده نیست.

یک تابع که روی هر زیرمجموعه‌ی فشرده از یک فضای موضعاً فشرده‌ی پیوسته باشد لزوماً روی کل فضا پیوسته نیست.

گزاره ۱.۴.۱. فرض کنیم X زیرمجموعه‌ی فشرده‌ای از فضای موضعاً فشرده‌ی E باشد. در این صورت همسایگی‌های فشرده‌ی X یک پایه برای همسایگی‌های این مجموعه تشکیل می‌دهند.

برهان. ابتدا فرض کنیم E فشرده باشد. همسایگی U از X را در نظر می‌گیریم که بدون از دست دادن کلیت ممکن است U را باز بگیریم. گزاره‌ی ۱.۳.۱ را برای دو مجموعه‌ی X و $Y = \mathbb{C}U$ به کار بگیریم. توجه کنیم از این که Y زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از E است، Y نیز فشرده است. بنابراین دو زیرمجموعه‌ی باز مجزا V و W که به ترتیب شامل X و Y هستند به دست می‌آوریم. از این که $V \subset \mathbb{C}W$ و $\bar{V} \subset \mathbb{C}W$ ، مشاهده می‌کنیم که $\mathbb{C}W \subset U$ و در نتیجه $\bar{V} \subset U$. اما $\bar{V}$ یک همسایگی بسته از X است که مشمول U است. لذا کافی است یادآوری کنیم که $\bar{V}$ نیز فشرده است.

هم اکنون قضیه را برای حالت کلی زمانی که E موضعاً فشرده باشد تعمیم می‌دهیم. برای اثبات قضیه، ابتدا نشان می‌دهیم که X حداقل یک همسایگی فشرده مانند U دارد. x را عضوی