



دانشگاه پیام نور

اهمیت منظر در نظریه عملگرها

دکتر اسماعیل نیکوفر

امروز کتابخوانی و علم‌آموزی نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.^۱

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتابخوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه مطالعه هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین سوره‌ای که بر آن فرستاده عظیم‌الشأن خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد

1. <https://farsi.khamenei.ir/message-content?id=2696>

شده است: «إِقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده اند.

دانشگاه پیام نور با گستره جغرافیایی ایران شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه جا و همه وقت، به عنوان دانشگاهی کتاب محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره گیری از تجربه های گرانقدر استادان و صاحب نظران برجسته کشورمان، کتاب ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه مهم و خطیر یاری رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه خطیر یاری می رسانند، سپاسگزاری می نمایم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام نور را منزلگاه اندیشه سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام نور

فهرست مطالب

نه	پیشگفتار
۱	فصل اول . مفاهیم اولیه
۱	۱-۱ فضای هیلبرت
۴	۲-۱ جبر باناخ
۶	۳-۱ C^* -جبر
۹	۴-۱ توابع یکنوای عملگری و محدب عملگری
۱۵	۵-۱ تابع محدب عملگری چند متغیره
۱۶	۶-۱ خلاصه
۱۷	فصل دوم . منظر توابع محدب ماتریسی
۱۸	۱-۲ مفهوم کلاسیک و ماتریسی منظر
۲۲	۲-۲ منظرهای مارچال
۲۳	۳-۲ منظر توابع با دامنه روی کلاس وسیع تری از ماتریس ها
۲۸	۴-۲ کاربردها
۳۱	۵-۲ تعمیم ها

۳۳	۶-۲ خلاصه
----	-----------

فصل سوم . منظرهای عملگری تعمیم یافته از توابع چند متغیره

۳۵	۱-۳ مقدمه
۳۸	۲-۳ نگاشت‌های عملگری منظم چند متغیره
۴۱	۳-۳ نامساوی ینسن برای نگاشت‌های عملگری منظم
۴۳	۴-۳ منظر عملگری و نگاشت خطی به‌طور کامل مثبت
۴۶	۵-۳ منظر عملگری تعمیم یافته چند متغیره
۵۳	۶-۳ منظر عملگری تعمیم یافته و نگاشت خطی به‌طور کامل مثبت
۵۶	۷-۳ خلاصه

فصل چهارم . برخی نابرابری‌های دراگومیر برای آنتروپی عملگری نسبی

۵۹	۱-۴ مقدمه
۶۳	۲-۴ تخمین خطاهای دوزنقه‌ای
۷۱	۳-۴ خلاصه

فصل پنجم . نابرابری‌های بیشتر برای آنتروپی عملگری نسبی

۷۳	۱-۵ مقدمه
۷۴	۲-۵ قدرمطلق کران‌های بالایی و پایینی
۷۸	۳-۵ یک کران بالایی بر حسب لگاریتم
۷۹	۴-۵ کران‌های بالایی و پایینی بیشتر
۸۱	۵-۵ خلاصه

فصل ششم . آنتروپی عملگری سالیس تعمیم یافته

۸۳	۱-۶ کران‌های آنتروپی عملگری نسبی سالیس
۹۰	۲-۶ کران‌های آنتروپی عملگری سالیس تعمیم یافته
۹۷	۳-۶ کران‌ها بر حسب میانگین عملگری
۱۰۲	۴-۶ خلاصه

فصل هفتم . آنتروپی عملگری نسبی تعمیم یافته ۱۰۵

- ۱-۷ مقدمه ۱۰۵
- ۲-۷ کران‌هایی برای آنتروپی عملگری نسبی تعمیم یافته ۱۰۸
- ۳-۷ کران‌هایی برای آنتروپی عملگری سالیس ۱۱۴
- ۴-۷ خلاصه ۱۱۸

فصل هشتم . آنتروپی عملگری نسبی تعمیم یافته وابسته به یک تابع ۱۲۱

- ۱-۸ واگرایی سزار و منظر کلاسیک ۱۲۱
- ۲-۸ کران‌های آنتروپی عملگری سزار ۱۲۳
- ۳-۸ کران‌های بالا و پایین برای $S(A|B)$ ۱۳۳
- ۴-۸ خلاصه ۱۳۷

فصل نهم . برخی نامساوی‌های عملگری از نوع لونر-هاینز ۱۳۹

- ۱-۹ مقدمه ۱۳۹
- ۲-۹ روابط هم ارزی برای میانگین عملگری هندسی ۱۴۱
- ۳-۹ روابط هم ارزی برای آنتروپی عملگری نسبی ۱۴۹
- ۴-۹ خلاصه ۱۶۴

فصل دهم . نظریف کران‌های برخی از آنتروپی‌های عملگری ۱۶۷

- ۱-۱۰ نامساوی هرمیت-آدامارد و هرمیت-آدامارد تعمیم یافته ۱۶۷
- ۲-۱۰ برخی نظریف‌های یافته شده ۱۶۸
- ۳-۱۰ کران‌های جدید برای برخی آنتروپی‌های عملگری ۱۷۱
- ۴-۱۰ خلاصه ۱۸۰

مراجع ۱۸۳

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۸۹
نمایه ۱۹۵

باسمه تعالی

الحمد لله علی ما انعم، و له الشکر علی ما الهی، والثناء بما قدم، ...
سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمون مان
شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزی
مان ساخت.
امیدوارم نتایج تحقیقات دوازده ساله بنده که بخشی از آن در این کتاب آمده است در پیش
برد اهداف عالی و علمی دانشگاه مفید واقع شود و مورد استفاده اساتید بزرگوار و دانشجویان
تحصیلات تکمیلی قرار گیرد.

اسماعیل نیکوفر
دانشگاه پیام نور

تقدیم به

همسر و دخترم ریحانه

پیشگفتار

توابع عملگری نقش به سزایی در محاسبات علمی و مهندسی ایفا می کنند. رده وسیعی از این توابع، توابع یکنوای عملگری و همچنین توابع محدب عملگری هستند. روابط گوناگونی بین یکنوایی عملگری و تحدب عملگری وجود دارد. آندو^۱ مفهوم میانگین عملگری را معرفی کرد و سپس کوبو^۲ با همکاری آندو ارتباط بین توابع یکنوای عملگری و میانگین عملگری را بررسی کردند. نظریه میانگین عملگری یک نقش بنیادی در نامساوی های عملگری، معادلات عملگری و نظریه اطلاعات کوانتوم دارد.

طیف وسیعی از توابع به نام توابع محدب ماتریسی وجود دارند که نقش اساسی در مکانیک آماری کوانتمی و نظریه اطلاعات کوانتمی بازی می کنند و توسط لاونر^۳ و کرایوس^۴ در دهه سی ام قرن نوزده پایه گذاری شده اند. این طیف وسیع از توابع مورد توجه ریاضی دانان بسیاری مانند هانسن^۵، پدرس^۶، آندو، افراس^۷ و دیگران قرار گرفته است. از جمله مثال های معروف از توابع ماتریسی می توان به تابع $\sqrt{X}$ (تابع ریشه ی دوم يك ماتریس مربع و مثبت) و تابع e^X (تابع نمایی از يك ماتریس مربع و مثبت) اشاره کرد که نقش مهمی را در محاسبات علمی و مهندسی ایفا می کنند. به تازگی ادوارد افراس تابع منظر کلاسیک و منظر تعمیم یافته ی مارچال^۸

-
1. Ando
 2. Kubo
 3. Loewner
 4. Kraus
 5. Hansen
 6. Pedersen
 7. Effros
 8. Maréchal

را در حالت ماتریسی و برای ماتریس‌های جابه‌جایی و مثبت اکید^۱ مطرح کرده و بعضی از خواص موجود در حالت کلاسیک را به حالت ماتریسی تعمیم داده است. از نتایج جالب این تعمیم می‌توان به ساده‌تر شدن اثبات مشترک محدب بودن تابع آنتروپی نسبی روی ماتریس‌های چگالی و مثبت اکید که منتسب به لیب^۲ و روسکای^۳ است و توسیع قضیه تقعر لیب در حالت $p + q \leq 1$ اشاره کرد. اما تعریف و توسعه‌ی افراس می‌تواند برای ماتریس‌های ناجابه‌جایی در نظر گرفته شود. در [۱۷] تعریف افراس را برای ماتریس‌های ناجابه‌جایی توسعه دادیم و سپس تعاریف جدیدی برای تابع منظر ماتریسی و تابع منظر تعمیم یافته‌ی ماتریسی مارچال ارائه دادیم و شرایط لازم و کافی برای مشترک محدب بودن این توابع و مشترک مقعر بودن آن‌ها به دست آوردیم. مفهوم ارائه شده بدین شکل، گرچه برای توابع یکنوای عملگری وجود داشت ولی وجود چنین مفهومی برای توابع محدب عملگری بحث نشده بود و نقطه ثقل اهمیت موضوع نیز در همین است. با استفاده از مفهوم منظر ناجابه‌جایی، مفهوم جدیدی از میانگین هندسی در [۵۹] معرفی کردیم که اساس ارائه اثبات کوتاهی برای قضیه تقعر لیب و توسیع آن و قضیه تحدب آندو شد. همچنین در [۶۱] شرایطی را یافتیم که قضیه تقعر لیب و توسیع آن را به قضیه تحدب لیب و توسیع تحدب گونه آن و قضیه تحدب آندو را به قضیه تقعر آندو تعمیم داد. در نهایت قضیه لیب را به حالت چند متغیره نیز گسترش دادیم [۷۸]. هانسن در [۳۵] نگاشت عملگری منظم چند متغیره را معرفی کرد که توسیعی از تابع یک متغیره طیفی دیویس^۴ می‌باشد. پس از آن وی مفهوم منظر نگاشت عملگری منظم چند متغیره را توسعه داد و به کمک آن مفهوم میانگین هندسی عملگری چند متغیره را تعریف کرد. این مفهوم یکی از مباحث مهم و کاربردی ریاضی است که کاربرد عملی از جمله در مکانیک کوانتوم، تصویربرداری راداری، تصویربرداری پزشکی و تجزیه و تحلیل اطلاعات مالی دارد.

ما مفهوم منظر تعمیم یافته چند متغیره را برای نگاشت منظم هانسن ارائه دادیم و شرایط لازم و کافی برای تحدب (تقعر) عملگری این مفهوم را بررسی کردیم و یکنوایی اطلاعات را برای این مفهوم جدید تحت شرایطی به دست آوردیم [۶۶]. با توجه به اهمیت موضوع منظر

1. strictly positive

2. Lieb

3. Ruskai

4. Davis

عملگری و کاربردهای وسیع آن در نظریه اطلاعات کوانتومی در فصل‌های دوم و سوم به تبیین این موضوع خواهیم پرداخت. بسیاری از میانگین‌های عملگری یا آنتروپی‌های عملگری به شکل منظر عملگری با تابع مولد از توابع مقدماتی شناخته شده‌اند.

مفهوم آنتروپی برای اولین بار در ترمودینامیک مطرح شد و امروزه در علوم مختلف از شیمی و فیزیک گرفته تا نظریه اطلاعات و نظریه محاسبات به کار می‌رود. آنتروپی علاوه بر نقشی که در مسائل اساسی ایفا می‌کند، کاربردهای مهمی نیز دارد. برای مثال، از آنتروپی برای مطالعه کارایی موتورهای بخار استفاده می‌شود و در کنار آن در فرمول‌های مربوط به ظرفیت انتقال داده‌های فیبرهای نوری نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

آنتروپی به روش‌های مختلف قابل تعریف است. یک شکل رایج آن که برای مطالعه سیستم‌های کلاسیک استفاده می‌شود، آنتروپی گیبس^۱ یا آنتروپی شانون^۲ است. این آنتروپی برای توزیع احتمال P به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(P) = \sum_x P(x) \log P(x).$$

این تعریف بعدها به آنتروپی فون‌نویمان^۳ تعمیم یافت. آنتروپی فون‌نویمان برای عملگرهای چگالی (عملگر با اثر یک) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(\rho) = -\text{tr}(\rho \log \rho).$$

در حالی که این نوع آنتروپی‌ها کاربردهای وسیعی دارند اما به تازگی آشکار شده است که آن‌ها برای توصیف درست مقادیری که مربوط به عملکرد برخی سیستم‌هاست، مناسب نیستند. این موجب شده است که برخی مفاهیم تعمیم یافته دیگری، برای مفهوم آنتروپی ارائه گردد که از بین آن‌ها می‌توان به آنتروپی صاف^۴ و آنتروپی طیف اطلاعات اشاره نمود.

در نظریه اطلاعات بالغ بر سی اندازه که آنتروپی شانون را تعمیم می‌دهند، معرفی شده‌اند؛ نظیر آنتروپی‌های پارامتری، مثلثاتی و وزن‌دار. آنتروپی شانون که میزان امید ریاضی اطلاعات نهفته در یک متغیر تصادفی را بیان می‌کند، کمیتی است که عدم قطعیت همراه با یک متغیر را

1. Gibbs
2. Shannon
3. Von Neumann
4. smooth

اندازه می‌گیرد. بنابراین در صورتی که متغیر تصادفی معلوم نباشد یک برآورد از میانگین اطلاعات از بین رفته را به دست می‌دهد.

در سال‌های اخیر تعمیم مفاهیم به حالت ماتریسی یا عملگری در شاخه‌های مختلف علوم از جمله مهندسی، آمار، نظریه اطلاعات کوانتومی و ریاضیات کاربردی اهمیت شایانی کسب کرده است. ماتریس‌های مثبت به عنوان «نقاط داده» در شکل‌های گوناگون ظاهر می‌شوند، برای مثال به عنوان ماتریس کوواریانس در آمار یا به عنوان ماتریس چگالی در اطلاعات کوانتومی. از این رو، نامساوی‌های ماتریسی (عملگری) به عنوان تعمیم حالت ناجابه‌جایی نامساوی‌های اسکالری در تحلیل این نوع ماتریس‌ها نقش به‌سزایی را ایفا می‌کنند.

آنتروپی عملگری نسبی، آنتروپی عملگری نسبی تعمیم‌یافته و آنتروپی عملگری نسبی سالیس^۱ از جمله آنتروپی‌های عملگری هستند که به آن‌ها خواهیم پرداخت. آنتروپی عملگری نسبی عملگرهای مثبت و اکید A و B در نظریه اطلاعات ناجابه‌جایی توسط فوجی^۲ و کامی^۳ [۲۱] به صورت زیر تعریف شده است

$$S(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \log(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

که نسخه نسبی از آنتروپی عملگری است که مد نظر ناکامورا^۴ - اومگاکا^۵ [۵۷] بود. آنتروپی عملگری نسبی تعمیم‌یافته عملگرهای مثبت اکید A و B یا آنتروپی شانون توسط فوروتا^۶ [۲۸] به شکل زیر تعریف شده است

$$S_q(A|B) = A^{\frac{1}{q}} (A^{-\frac{1}{q}} B A^{-\frac{1}{q}})^q \log(A^{-\frac{1}{q}} B A^{-\frac{1}{q}}) A^{\frac{1}{q}}$$

که در آن $q \in \mathbb{R}$ است. همچنین یاناگی^۷ و همکارانش در [۹۱] آنتروپی عملگری نسبی سالیس را به صورت زیر تعریف کرده‌اند

$$T_{\lambda}(A|B) := \frac{A^{\frac{1}{\lambda}} (A^{-\frac{1}{\lambda}} B A^{-\frac{1}{\lambda}})^{\lambda} A^{\frac{1}{\lambda}} - A}{\lambda}$$

-
1. Tsallis
 2. Fujii
 3. Kamei
 4. Nakamura
 5. Umegaki
 6. Furuta
 7. Yanagi

که تعمیمی از آنتروپی عملگری نسبی است.

در فصل چهارم با بهره‌مندی از بهبودها و نابرابری‌های در جهت عکس از نابرابری یانگ، نابرابری‌هایی برای آنتروپی عملگری نسبی به‌دست می‌آوریم و هدف این نابرابری‌ها هم تخمین کران‌های بالا و پایین آن است. در فصل پنجم برای نوع دیگری از تفاضل ارائه شده در فصل چهارم، کران‌هایی خواهیم یافت که در نهایت منجر به یافتن نابرابری‌های عملگری بیشتری برای آنتروپی عملگری نسبی دو عملگر مثبت وارون‌پذیر خواهند شد. در فصل ششم کران‌های بالا و پایینی برای آنتروپی عملگری سالیس بر حسب مفهوم منظر عملگری مشخص می‌نماییم. افزون بر این، کران‌های بالا و پایینی برای آنتروپی عملگری سالیس تعمیم‌یافته می‌یابیم تا بدان وسیله کران‌هایی برای آنتروپی عملگری نسبی تعمیم‌یافته مشخص گردد. در فصل هفتم، کران‌هایی را برای آنتروپی عملگری نسبی تعمیم‌یافته در حالت کلی معین می‌کنیم. به عبارتی کران‌های تفاضل‌های به دست آمده در فصل‌های چهارم و پنجم نسبت به پارامتر مشخصی گسترش خواهند یافت. به‌ویژه، کران‌های آنتروپی عملگری نسبی سالیس تعمیم‌یافته تخمین زده خواهند شد. در فصل هشتم ابتدا مفهوم واگرایی سزار^۱ را مطرح می‌کنیم و ارتباط بین واگرایی سزار و منظر کلاسیک وابسته به تابع را مشخص می‌کنیم که در فصل دوم بحث شد و مثال‌های متنوعی از واگرایی‌های سزار را خواهیم آورد. سپس نداشت واگرایی عملگری سزار را معرفی می‌کنیم و ارتباط بین نداشت واگرایی عملگری سزار و آنتروپی عملگری نسبی تعمیم‌یافته وابسته به تابع را بررسی می‌کنیم. همچنین کران‌های آنتروپی عملگری نسبی تعمیم‌یافته وابسته به تابع مشخص را به دست می‌آوریم. با توجه به این که نامساوی لونر-هاینز^۲ مشهورترین نامساوی در نظریه عملگرها بوده و ابزار مفیدی برای اثبات و تفسیر نامساوی‌های عملگری است، در فصل نهم عکس نامساوی لونر-هاینز از دیدگاه منظر و منظر تعمیم‌یافته برخی توابع بررسی می‌گردد. افزون بر این، برخی روابط هم‌ارزی برای میانگین عملگری هندسی و آنتروپی عملگری نسبی مورد بحث قرار خواهد گرفت. در فصل دهم رویکرد دیگری برای یافتن کران‌های برخی آنتروپی‌های عملگری در پیش خواهیم گرفت. با استفاده از نامساوی هرmit-آدامارد^۳ تعمیم‌یافته کران‌هایی می‌یابیم که کران‌های تیزتر و بهتری در مقایسه با کران‌های پیدا شده هستند. در پایان هر فصل

1. Csiszár divergence

2. Heinz

3. Hermite-Hadamard

نیز خلاصه‌ای از مطالب ذکر شده، جمع بندی گردیده تا به خواننده در فهم مطالب کمک کند.
از این کتاب دانشجویان دوره‌های تحصیلات تکمیلی رشته ریاضی محض در گرایش
آنالیز ریاضی و یا نظریه عملگرها می‌توانند در یک نیمسال تحصیلی استفاده کنند.

اسماعیل نیکوفر

دانشگاه پیام نور

فصل اول

مفاهیم اولیه

۱-۱ فضای هیلبرت

فرض کنیم $\mathcal{F}$ میدان اسکالر فضای برداری $\mathcal{H}$ باشد.

تعریف (۱). فضای برداری $\mathcal{H}$ روی میدان $\mathcal{F}$ به همراه ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ، فضای هیلبرت^۱ نامیده می‌شود هرگاه $\mathcal{H}$ نسبت به متر القایی

$$d(\xi, \eta) = \langle \xi - \eta, \xi - \eta \rangle^{\frac{1}{2}}$$

توسط ضرب داخلی یک فضای متری کامل باشد. این ضرب داخلی برای هر $\xi, \eta, \theta \in \mathcal{H}$ و $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ دارای خواص زیر است

$$1. \langle \alpha\xi + \beta\eta, \theta \rangle = \alpha\langle \xi, \theta \rangle + \beta\langle \eta, \theta \rangle$$

$$2. \langle \xi, \alpha\eta + \beta\theta \rangle = \bar{\alpha}\langle \xi, \eta \rangle + \bar{\beta}\langle \xi, \theta \rangle$$

$$3. \langle \xi, \xi \rangle \geq 0$$

1. inner product

2. Hilbert space

$$۴. \langle \xi, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, \xi \rangle},$$

$$۵. \text{ اگر } \langle \xi, \xi \rangle = 0, \text{ آن گاه } \xi = 0.$$

هر فضای برداری $\mathcal{H}$ روی میدان $\mathcal{F}$ را همراه با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ که در خواص فوق صدق کند يك فضای ضرب داخلی^۱ می‌نامیم.

نرم هر عضو فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را به صورت $\|\xi\| = \langle \xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌کنیم. برای هر $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ نامساوی کشی-شوارتز^۲

$$|\langle \xi, \eta \rangle|^2 \leq \langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle$$

برقرار است.

تعریف (۲). فرض کنیم $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت باشند. $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ یک نگاشت خطی است هرگاه برای هر $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ و $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{F}$ داشته باشیم

$$T(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) = \alpha_1 T(h_1) + \alpha_2 T(h_2).$$

در این صورت T را یک عملگر خطی از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به توی $\mathcal{K}$ می‌گوییم و مجموعه همه عملگرهای خطی کران‌دار از $\mathcal{H}$ به توی $\mathcal{K}$ را با نماد $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف (۳). فرض کنیم $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. در این صورت عملگر یکتای $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ که در تساوی $\langle Ah, k \rangle = \langle h, Bk \rangle$ صدق کند را الحاقی A نامیده و به صورت A^* نمایش می‌دهیم. در حقیقت، برای هر $h \in \mathcal{H}$ و $k \in \mathcal{K}$ داریم

$$\langle Ah, k \rangle = \langle h, A^*k \rangle.$$

تعریف (۴). هرگاه $A = A^*$ ، عملگر A را خودالحاق^۳ یا هرمیتی می‌نامیم.

تعریف (۵). در صورتی که برای هر $h \in \mathcal{H}$ و $h \neq 0$ ، $\langle Ah, h \rangle \geq 0$ را عملگر مثبت^۴ می‌نامیم و می‌نویسیم $A \geq 0$. در صورتی که برای هر $h \in \mathcal{H}$ و $h \neq 0$ ، $\langle Ah, h \rangle > 0$ را عملگر مثبت اکیده^۵ می‌نامیم و می‌نویسیم $A > 0$.

1. inner product space
2. Cauchy-Schwartz inequality
3. self-adjoint
4. positive operator
5. strictly positive operator

تعریف (۶). طیف عملگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ، مجموعه همه اسکالرهایی مانند λ است که $T - \lambda I$ معکوس پذیر نباشد. به عبارت دیگر

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathcal{F} : T - \lambda I \text{ نباشد معکوس پذیر}\}$$

که در آن $\mathcal{F}$ میدان اسکالر فضای برداری $\mathcal{H}$ است. سوپریمم قدرمطلق اعضای طیف عملگر T را شعاع طیفی می نامیم و با $r(T)$ نشان می دهیم، یعنی

$$r(T) = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

تعریف (۷). فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت با بعد متناهی همراه با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و $L(\mathcal{H})$ فضای عملگرهای خطی روی $\mathcal{H}$ باشد. هرگاه A عملگری مثبت و اثر^۱ آن برابر عدد یک باشد، می گوییم A ماتریس چگالی^۲ است.

تعریف (۸). [۶] فرض کنیم $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ دو فضای هیلبرت به ترتیب با ابعاد n و m باشند. فرض کنیم $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ضرب تانسوری آن ها باشد. اثر جزئی^۳ که با Tr_2 نشان می دهیم نگاشت خطی از $L(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ به توی $L(\mathcal{H}_1)$ است که به صورت زیر تعریف می شود

فرض کنیم $\{e_1, \dots, e_m\}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}_2$ باشد و $A \in L(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ در این صورت اثر جزئی $\text{Tr}_2 A$ عملگر خطی A_1 است که روی $\mathcal{H}_1$ با رابطه زیر برای هر $x, y \in \mathcal{H}_1$ تعریف می شود

$$\langle x, A_1 y \rangle = \sum_{j=1}^m \langle x \otimes e_j, A(y \otimes e_j) \rangle.$$

به راحتی بررسی می شود که A_1 خوش تعریف است، یعنی مستقل از انتخاب پایه متعامد یکه است. همچنین به روش مشابه اثر جزئی $A_2 = \text{Tr}_1 A$ قابل تعریف است که یک عملگر خطی روی $\mathcal{H}_2$ است.

اگر A عملگر مثبت باشد، آنگاه اثرهای جزئی آن نیز مثبت اند و اگر A ماتریس چگالی باشد، آنگاه A_1 و A_2 نیز ماتریس چگالی اند. عملگر A روی $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ تجزیه پذیر نامیده می شود هرگاه به شکل $A = A_1 \otimes A_2$ قابل تجزیه باشد که در آن A_1 و A_2 عملگرهایی به

1. Trace

2. density matrix

3. partial trace

ترتیب روی $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ هستند. اگر A_1 و A_2 ماتریس‌های چگالی باشند، آن‌گاه ضرب تانسوری آن‌ها $A = A_1 \otimes A_2$ نیز ماتریس چگالی است [۶].

۱-۲ جبر باناخ

در این بخش ابتدا به بیان تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز در مورد $*$ -حلقه‌ها^۱ می‌پردازیم. مأخذ اصلی مطالب این بخش، کتاب $*$ -حلقه‌های بئراز بریریان^۲ [۴] است. همه حلقه‌های در نظر گرفته شده شرکت‌پذیر و یکدار هستند.

تعریف (۹). فرض کنیم $\mathcal{R}$ یک حلقه باشد. نگاشت $x \mapsto x^*$ روی $\mathcal{R}$ را یک برگشت^۳ گوئیم هرگاه به ازای هر x و y در $\mathcal{R}$ ، روابط زیر برقرار باشند

$$1. (x^*)^* = x,$$

$$2. (x + y)^* = x^* + y^*,$$

$$3. (xy)^* = y^*x^*.$$

تعریف (۱۰). زوج $(\mathcal{R}, *)$ که در آن $\mathcal{R}$ یک حلقه و $*$ ، یک برگشت روی $\mathcal{R}$ است، یک $*$ -حلقه نامیده می‌شود.

تعریف (۱۱). عضو p در $*$ -حلقه $\mathcal{R}$ را یک تصویر می‌نامیم هرگاه

$$p = p^* = p^2.$$

تعریف (۱۲). عضو u در $*$ -حلقه $\mathcal{R}$ را یکانی^۴ می‌نامیم هرگاه

$$u^*u = uu^* = 1_{\mathcal{R}}.$$

تعریف (۱۳). عضو a در $*$ -حلقه $\mathcal{R}$ را مثبت گوئیم هرگاه برای اعضای $x_1, \dots, x_n$ و x_n در $\mathcal{R}$ داشته باشیم

$$a = x_1^*x_1 + \dots + x_n^*x_n.$$

1. $*$ -rings
2. Berberian
3. involution
4. unitary

عضو مثبت را با $a \geq 0$ و مجموعه همه اعضای مثبت R را با R^+ نشان می‌دهیم.
جبر A را یک حلقه در نظر خواهیم گرفت که ساختار فضای برداری هم دارد و برای هر

$a, b \in A$ و $\alpha \in F$ داریم

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b).$$

تعریف (۱۴). جبر باناخ^۱ A ، جبر A روی میدان F همراه با نرم $\|\cdot\|$ است که نسبت به آن A یک فضای باناخ است و برای هر $a, b \in A$ در خاصیت زیرضربی زیر هم صدق می‌کند

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|.$$

اگر e عضو همانی^۲ A باشد، آن‌گاه می‌توانیم $\|e\| = 1$ در نظر بگیریم. زیرا با توجه به گزاره ۳.۱.۱ از [۸۶] نرم $\|\cdot\|$ روی A وجود دارد به طوری که

۱. نرم جدید $\|\cdot\|_0$ با نرم اصلی $\|\cdot\|$ معادل است،

۲. $(A, \|\cdot\|_0)$ جبر باناخ است،

۳. $\|e\|_0 = 1$.

عضو همانی A را با ۱ نشان خواهیم داد. در صورتی که A یکدار نباشد با تعریف یک ساختار جبر باناخ مناسب روی جمع مستقیم $A_1 = A \oplus \mathbb{C}$ و نشان دادن A در A_1 یک یکرختی طول‌پا بین A و جبر باناخ یکدار A_1 با عضو همانی $1 \oplus 0$ برقرار می‌شود ([۸]، گزاره ۳.۱.۷). تحت این یکرختی، جبر باناخ A ایده‌آل A_1 است. با این کار تعریف معکوس و طیف^۳ برای اعضای جبرهای باناخ غیر یکدار ممکن خواهد شد. در نیم گروه S عضو x منظم^۴ نامیده می‌شود هرگاه $z \in S$ موجود باشد به طوری که $xzx = x$. در این صورت عضو z را شبه وارون^۵ می‌نامند.

1. Banach algebra
2. identity element
3. spectrum
4. regular
5. pseudo inverse

۱-۳ C^* -جبر

C^* -جبرها^۱ حالت خاصی از جبرهای باناخ هستند که با نظریه عملگرها روی یک فضای هیلبرت ارتباط نزدیکی دارند. به ویژه هر C^* -جبر با زیرجبری از عملگرهای کراندار روی یک فضای هیلبرت یکریخت است.

تعریف (۱۵). C^* -جبر A ، $*$ -حلقه‌ای است که ساختار جبر باناخ روی میدان اعداد مختلط دارد و برای هر $a \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داریم

$$\|a^*a\| = \|a\|^2,$$

$$(\alpha a)^* = \bar{\alpha}a^*.$$

برای مثال اگر $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت باشد، آنگاه $B(\mathcal{H})$ یک C^* -جبر است. زیرا با توجه به گزاره ۶.۲.۲ از [۸]، الحاقی یک عملگر یک تابع برگشت است و طبق گزاره ۷.۲.۲ از [۸]، برای هر $a \in B(\mathcal{H})$ داریم $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

در تعاریف و قضایای بعدی A را C^* -جبر یکانی در نظر می‌گیریم.

اگر B یک C^* -جبر باشد، $*$ -همریختی $\rho: A \rightarrow B$ یک همریختی جبری است هرگاه

برای هر $a \in A$ ،

$$\rho(a^*) = \rho(a)^*$$

و طول‌پاست هرگاه

$$\|\rho(a)\| = \|a\|.$$

بر اساس قضیه ۸.۴.۸ از [۸]، هر $*$ -همریختی یک به یک طول‌پاست.

گزاره ۱-۱. فرض کنیم $a \in A$. در این صورت

۱. اگر a وارون پذیر باشد، آنگاه a^* معکوس پذیر است و $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$ ،

۲. اگر u عضویکانی A باشد، آنگاه $\|u\| = 1$ ،

۳. اگر B C^* -جبر باشد و $\rho: A \rightarrow B$ ρ^* -همریختی باشد، آنگاه $\|\rho(a)\| \leq \|a\|$ ،

۴. اگر $a = a^*$ ، آنگاه $\|a\| = r(a)$.



برهان: [۸]، گزاره ۱۱.۱.۸.

یک نتیجه بسیار مهم و کاربردی از قسمت سوم گزاره فوق این است که هر ρ^* -همریختی پیوسته است.

تعریف (۱۶). عضو $a \in A$ را هرمیتی یا خودالحاق گوئیم هرگاه $a = a^*$ و این عضو را نرمال نامیم در صورتی که $aa^* = a^*a$. واضح است طبق این تعریف هر عضو خودالحاق، نرمال است ولی عکس آن برقرار نیست. همچنین $a \in A$ را مثبت^۱ گوئیم هرگاه a هرمیتی باشد و $\sigma(a) \subseteq [0, \infty]$. در صورتی که a مثبت باشد می نویسیم $a \geq 0$ و مجموعه اعضای مثبت A را با A^+ نشان می دهیم.

فرض کنیم $a, b \in A$ دو عضو هرمیتی باشند. در این صورت می گوئیم $a \leq b$ هرگاه $b - a \in A^+$. بنا بر گزاره ۵.۳.۸ از [۸]، برای هر $a \in A^+$ و $n \geq 1$ ، عضو یکتای $b \in A^+$ وجود دارد به طوری که $a = b^n$ که در آن b را ریشه n ام^۲ می نامیم و با $b = a^{\frac{1}{n}}$ نشان می دهیم. قدر مطلق عملگر $x \in B(\mathcal{H})$ به صورت $|x| = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$ تعریف می شود.

گزاره ۱-۲. اگر $a \in A$ ، آنگاه گزاره های زیر هم/ارزند.

۱. $a \geq 0$.

۲. عضو $b \in A$ وجود دارد به طوری که $b = b^*$ و $a = b^2$.

۳. عضو $t \in A$ وجود دارد به طوری که $a = t^*t$.



برهان: برای اثبات به منبع [۸] اثبات قضیه ۶.۳.۸ مراجعه کنید.

1. positive
2. n^{th} root