



دانشگاه پیام نور

ریاضیات پایه و مقدمات آمار ۲

دکتر موسی الرضا شمسیه زاهدی

امروز کتابخوانی و علم‌آموزی نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.^۱

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتابخوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه مطالعه هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین سوره‌ای که بر آن فرستاده عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد

1. <https://farsi.khamenei.ir/message-content?id=2696>

شده است: «إِقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده اند.

دانشگاه پیام نور با گستره جغرافیایی ایران شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه جا و همه وقت، به عنوان دانشگاهی کتاب محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره گیری از تجربه های گرانقدر استادان و صاحب نظران برجسته کشورمان، کتاب ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه مهم و خطیر یاری رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه خطیر یاری می رسانند، سپاسگزاری می نمایم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام نور را منزلگاه اندیشه سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام نور

فهرست مطالب

پیشگفتار	هفت
فصل اول. بردار و ماتریس	۱
هدف کلی	۱
هدف‌های یادگیری	۱
مقدمه	۲
۱-۱ بردارها	۲
۲-۱ ماتریس	۶
۳-۱ دترمینان	۱۸
۴-۱ وارون ماتریس	۲۷
۵-۱ کاربردی از ماتریس‌ها در رمزنویسی	۳۲
۶-۱ اعمال سطری مقدماتی	۳۵
فصل دوم. دستگاه معادلات خطی	۴۷
هدف کلی	۴۷
هدف‌های یادگیری	۴۷
مقدمه	۴۸
۱-۲ دستگاه معادلات خطی	۴۸
۲-۲ حل دستگاه معادلات خطی $n \times n$	۵۲
۳-۲ روش‌های کلی حل دستگاه	۵۷
فصل سوم. تبدیلات خطی و مقادیر ویژه	۸۷
هدف کلی	۸۷

۸۷	هدف‌های یادگیری.....
۸۷	مقدمه.....
۸۸	۱-۳ فضای برداری R^n
۹۵	۲-۳ تبدیلات خطی.....
۱۰۲	۳-۳ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه.....
۱۱۱	فصل چهارم. توابع چند متغیره و مشتقات جزئی.....
۱۱۱	هدف کلی.....
۱۱۱	هدف‌های یادگیری.....
۱۱۲	مقدمه.....
۱۱۲	۱-۴ توابع چندمتغیره.....
۱۱۷	۲-۴ حد و پیوستگی.....
۱۲۴	۳-۴ مشتقات جزئی.....
۱۳۸	۴-۴ دیفرانسیل کل، قاعده زنجیره‌ای و مشتق ضمنی.....
۱۴۸	۵-۴ کاربردهایی از مشتق جزئی.....
۱۵۲	۶-۴ ماکسیمم و مینیمم توابع دو متغیره.....
۱۶۵	۷-۴ ماکسیمم و مینیمم چند متغیره مقید.....
۱۸۷	فصل پنجم. انتگرال.....
۱۸۷	هدف کلی.....
۱۸۷	هدف‌های یادگیری.....
۱۸۷	مقدمه.....
۱۸۸	۱-۵ انتگرال نامعین.....
۲۰۰	۲-۵ روش تغییر متغیر در انتگرال گیری.....
۲۰۸	۳-۵ روش انتگرال‌گیری جزء به جزء.....
۲۱۵	۴-۵ روش تجزیه کسرها در انتگرال‌گیری.....
۲۲۳	۵-۵ انتگرال معین.....
۲۳۴	۶-۵ کاربرد انتگرال معین.....
۲۴۶	۷-۵ کاربردهای اقتصادی انتگرال معین.....
۲۵۱	۸-۵ آشنایی با معادلات دیفرانسیل.....
۲۶۱	نمایه.....
۲۶۳	منابع.....

پیشگفتار

آفرین جان آفرین پاک را
آنکه جان بخشید و ایمان خاک را

کتاب حاضر حاصل تجربه چند ساله تدریس درس ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت برای دانشجویان رشته های مدیریت و حسابداری است. در نگارش این اثر سعی شده است که تا حد امکان، مطالب به زبانی ساده و روان برای دانشجویان رشته های علوم انسانی بیان شود. البته با توجه به زنجیره وار بودن اغلب مباحث ریاضی، امید است که دانشجویان عزیز، با در اختیار داشتن تجربه ای مناسب از درس ریاضیات پایه و مقدمات آمار ۱ و یا ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت قدم در این راه نهاده باشند، تا لذت بیشتری از مطالعه مباحث ذکر شده نصیب یکایک آنها گردد.

تلاش ما بر این بود که نحوه ارائه مباحث در هر فصل مستقیم و منظم باشد. برای برجسته نمودن مطالب مهم تر از جمله تعریف ها، فرمول ها، قضیه ها و نکات مهم هر قسمت، آنها را در کادرهای ویژه ای قرار داده و در پایان حل مثال ها از نماد ■ استفاده نموده ایم. تذکری که در هر بخش دیده می شود، از جمله مواردی است که همواره باید با دقت و تأمل بیشتری ملاحظه گردد. در انتهای هر بخش تمرین هایی به منظور تسلط بیشتر دانشجویان عزیز با علامت  ارائه شده اند. همچنین در پایان تمام فصل ها (به جز فصل سوم) تمرین های گوناگون که با نماد  تمایز شده اند، برای امتحان آموخته های دانشجو و جمع بندی مطالب ذکر شده است. تمامی این

تمرین‌ها از ساده به دشوار مرتب شده تا دانشجویان با اعتماد به نفس بهتری گام‌به‌گام، به حل آن‌ها بپردازند.

در اغلب فصل‌ها بر آن بودیم که مواردی از کاربردهای ملموس و مفید ریاضی در اقتصاد و مدیریت، بیان گردد. در فصل اول به معرفی و بیان بحث ساده و جالب بردارها و ماتریس‌ها می‌پردازد. البته هدف عمده این فصل فراهم آوردن مقدمات لازم برای معرفی روش‌های حل دستگاه‌های معادلات خطی در فصل دوم است. فصل سوم اشاره‌ای به بحث مقادیر ویژه و بردارهای ویژه دارد که به‌طور مستقیم به فصل‌های اول و دوم مرتبط است. در فصل چهارم این کتاب، توابع چند متغیره و نمودارهایی از توابع دومتغیره برای درک بهتر مطالب ارائه گردید. هدف اصلی، معرفی مشتقات جزئی توابع چند متغیره و آشنایی با کاربردهای آن در مسائل بهینه‌سازی است. در فصل آخر به دلیل اهمیت بحث انتگرال و بنا به تجربه، نخست به معرفی و بررسی آن پرداختیم. در این فصل ابتدا مفهوم انتگرال نامعین و سپس انتگرال معین آورده شده است. تلاش ما بر این بود که نحوه نزدیک شدن به بحث انتگرال معین از نگرشی هندسی پیروی نماید. همچنین مقدمه‌ای بر نظریه معادلات دیفرانسیل در انتهای این فصل آورده‌ایم که می‌تواند سر آغازی برای پژوهش و تحقیق دانشجویان علاقه‌مند در این مورد باشد.

در چاپ دوم این کتاب به جز مطالب مذکور، تلاش شده است، با اضافه کردن روش‌های دیگری از حل مسائل، در بعضی بخش‌ها مانند روش‌های انتگرال‌گیری و اکسترمم توابع چند متغیره به روش لاگرانژ (که تجربه ثابت نموده از مباحث چالش برانگیز برای دانشجویان است)، درک و فهم مطالب آسان‌تر گردد. همچنین در فصل‌های ۲، ۴ و ۵ مثال‌های کاربردی متنوع‌تری از مدیریت و اقتصاد، آورده شده است تا دانشجو به درک بهتری از مفاهیم بیان شده در آن فصل دست یابد. در پایان آن بخش، جهت تمرین بیشتر، مسائل مشابهی از آن مثال‌ها را به‌عنوان تمرین افزوده‌ایم. همچنین ترتیب فصل‌های کتاب را با توجه به ارتباط مفاهیم مشتق و انتگرال تغییر داده‌ایم. در نهایت سعی ما بر این بوده که اشکالات تائیدی احتمالی در پاسخ مثال‌ها در ویرایش قبلی رفع گردد.

از همه دوستانی که به‌طور مستقیم و یا غیرمستقیم مرا در تهیه این کتاب یاری کرده‌اند، به‌ویژه همکار ارجمندم آقای رضا دستجردی که در تمام مراحل مطالعه، تدوین و نگارش این اثر مشارکت جدی داشتند، نهایت تقدیر و تشکر را دارم.

در پایان، آفریدگار کریم، یکتای بلند مرتبه و بی‌نهایت مطلق را می‌ستایم که توفیق خدمت را نثار این بندهٔ کوچک خویش ساخته است. به رسم ادب و احترام از راهنمایی‌های بی‌شائبه و حکیمانهٔ دانشمند فرزانه و استاد گرانمایه، **آقای دکتر محمد حسن بیژن‌زاده** نهایت تشکر را دارم. بدون تردید ویراستاری هر کتاب ریاضی از جمله موارد حائز اهمیت است که رنجی بیش از نگارش آن دارد، در اینجا تشکر خالصانه خویش را تقدیم همکاران گرانقدر و نکته‌بین، **آقای محسن ساعدی و سرکار خانم دکتر رحمت سلطانی** می‌نمایم که مسئولیت ویراستاری علمی کتاب را برعهده داشته‌اند.

پیشاپیش از تمامی همکاران عزیزی که که با ارسال نظرات و انتقادات سازنده، مرا مورد لطف و عنایت خویش قرار می‌دهند، سپاسگزارم.

گر خطا گفتیم اصلاحش تو کن مصلحی تو ای تو سلطان سخن

موسی‌الرضا شمسیه زاهدی

عضو هیئت علمی دانشگاه پیام نور

مرکز نیشابور

تقديم به:

همسر مهربانم

و

دخترانم «مهرناز و مهرنوش»

فصل اول

بردار و ماتریس

هدف کلی

هدف کلی این فصل آشنایی با مفاهیم و تعاریف بردارها و ماتریس‌ها و اعمال جبری روی آن‌ها می‌باشد.

هدف‌های یادگیری

- دانشجو پس از مطالعه دقیق این فصل باید بتواند:
۱. با تعریف بردار و خواص ابتدایی آن آشنا شود.
 ۲. با اعمال جبری بر روی یک بردار آشنا شود.
 ۳. مفهوم ضرب داخلی دو بردار و نرم آن را توضیح دهد.
 ۴. با تعریف ماتریس و ماتریس‌های خاص آشنا گردد.
 ۵. اعمال جبری بر روی ماتریس‌ها را به‌طور کامل فراگیرد.
 ۶. دترمینان یک ماتریس مربعی را محاسبه نماید و با خواص آن آشنا گردد.
 ۷. با استفاده از روش ماتریس الحاقی وارون یک ماتریس داده شده را محاسبه نماید.
 ۸. با کاربرد وارون یک ماتریس در رمزنویسی آشنا شود.
 ۹. اعمال سطری مقدماتی روی یک ماتریس را بیان نموده و از آن‌ها برای محاسبه وارون یک ماتریس استفاده کند.

مقدمه

در این فصل به طور اجمالی با نظریه جبر برداری و ماتریس‌ها که از جمله مباحث کاربردی ریاضیات در علوم مختلف است، آشنا خواهیم شد. در واقع مفهوم بردار و ماتریس به عنوان ابزاری در ساده‌سازی مسائل مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. البته مهم‌ترین کاربرد جبر ماتریس‌ها را در فصل بعد، در حل یک دستگاه معادلات چند مجهولی، خواهیم دید.

۱-۱ بردارها

۱-۱-۱ مقدمه

بردارها را می‌توان به عنوان بلوک‌های تشکیل‌دهنده جبر ماتریسی تعبیر نمود. به همین دلیل قبل از بررسی ماتریس‌ها، ضروری به نظر می‌رسد که آشنایی اولیه‌ای با مفاهیم و تعاریف آن‌ها داشته باشیم. در این بخش به معرفی مقدماتی بردارها و برخی از خواص آن‌ها خواهیم پرداخت.

۱-۱-۲ تعریف

یک بردار عبارت است از نمایش ستونی برای یک یا چند عدد، که به هر یک از آن‌ها مؤلفه‌های آن بردار گفته می‌شود.

به عنوان مثال بردار $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ دارای دو مؤلفه می‌باشد که مؤلفه اول آن عدد ۲ و مؤلفه دوم آن عدد ۳ است.

در حالت کلی به نمایش $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ یک بردار n -بعدی نامیم.

۱-۱-۳ تعریف

دو بردار $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ را مساوی نامیم اگر:

الف) $n = m$ (یعنی دو بردار هم‌بعد باشند).
 ب) مؤلفه‌های متناظر در هر یک مساوی باشد، یعنی برای هر i داشته باشیم
 $x_i = y_i$.

مثال ۱-۱

مقادیر a و b را طوری بیابید که دو بردار $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-2a \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} b \\ -a^2 \end{bmatrix}$ مساوی باشند.

حل:

با توجه به اینکه دو بردار مورد نظر دارای بعد یکسان‌اند، تنها کافی است که مؤلفه‌های متناظرشان برابر باشد، بنابراین باید داشته باشیم $b = 2$ و $1-2a = -a^2$ و در نتیجه $a = 1$. ■

۱-۱-۴ تعریف

ترانهاده بردار $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ را با X^t نشان می‌دهیم و عبارت است از:

$$X^t = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$$

۱-۱-۵ تعریف

ضرب اسکالر عدد دلخواه t در بردار $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ را با نماد tX نمایش داده و عبارت

است از $tX = \begin{bmatrix} tx_1 \\ tx_2 \\ \vdots \\ tx_n \end{bmatrix}$ یعنی عدد t در تمام مؤلفه‌های بردار X ضرب می‌شود.

۶-۱-۱ تعریف

اگر $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ دو بردار n -بعدی باشند، آنگاه جمع این دو بردار را با

$X + Y$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X + Y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

مثال ۲-۱

جمع دو بردار $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ امکان‌پذیر نیست زیرا تعداد مؤلفه‌های این دو بردار یکسان

نیست و برای دو بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

۷-۱-۱ تعریف

ضرب نقطه‌ای دو بردار $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ را با $X.Y$ نمایش می‌دهیم و

به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X.Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

مثال ۳-۱

اگر $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ آنگاه:

■ $X.Y = (1 \times 2) + (-1 \times 3) + (2 \times 0) = -1$.

۸-۱-۱ تعریف

نرم بردار $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ را با علامت $\|X\|$ نمایش داده و عبارت است از $\|X\| = \sqrt{X.X}$.

از لحاظ شهودی نرم یک بردار همان طول بردار موردنظر است. به طور

مثال برای بردار $X = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}$ داریم:

$\|X\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{12}$

۹-۱-۱ خواص بردارها

برای سه بردار n -بعدی X ، Y و Z و همچنین اعداد حقیقی دلخواه t و s همواره داریم:

۱. $t(X + Y) = tX + tY$

۲. $(t + s)X = tX + sX$

۳. $X + Y = Y + X$

۴. $X.Y = Y.X$

۵. $X.(Y + Z) = X.Y + X.Z$

۶. $(tX).Y = t(X.Y) = X.(tY)$

۷. اگر $X = 0$ آنگاه داریم $X.X = 0$.

۸. اگر $X \neq 0$ آنگاه داریم $X.X > 0$.

تمرین‌های بخش ۱-۱

۱. برای بردارهای $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ نشان دهید

$.XY = XZ$

۲. با فرض $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ حاصل هر قسمت را بیابید.

الف) $Z - Y$ ب) $7X + 3Z$ ج) $-Y - 2Z$ د) $(4X + Y)^t$
 ه) $3Z - (Y - Z)$ و) $\|X + Y\|$ ز) $\|X\| + \|Y\|$ ح) $\frac{Y}{\|Y\|}$

۳. بردار $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ را طوری بیابید که در خاصیت $\|X\| = 1$ صدق کند.

۲-۱ ماتریس

۱-۲-۱ تعریف

به هر آرایش مستطیل شکل از اعداد که به صورت m سطر و n ستون مرتب شده باشند، یک **ماتریس** m در n (یا از مرتبه $m \times n$) گوئیم و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

عدد واقع در سطر i ام و ستون j ام را با نماد a_{ij} نشان داده و آن را **عنصر** یا **درایه** ماتریس نامیم. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ لاتین مانند $A, B, C, \dots$ نمایش می‌دهیم.

برای خلاصه‌نویسی نمایش ماتریس A ، می‌توان از نماد $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ نیز استفاده کرد.

به‌عنوان مثال نمادهای

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, A = [1 \quad -6 \quad 5]$$

ماتریس‌هایی با مرتبه‌های 1×3 ، 2×2 و 3×3 هستند.

۲-۲-۱ تعریف

دو ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ را مساوی نامیم هرگاه:

(الف) دارای مرتبه مساوی باشند ($m=p$ و $n=q$).

(ب) درایه‌های نظریه‌نظیر دو ماتریس یکسان باشند (یعنی برای هر i و j داشته باشیم $a_{ij} = b_{ij}$).

مثال ۴-۱

$$x \text{ را طوری بیابید که داشته باشیم } \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ x^2 - 1 & -3 \end{bmatrix}$$

حل:

با توجه به تعریف تساوی دو ماتریس کافی است داشته باشیم $x^2 - 1 = 0$. یعنی $x = \pm 1$. ■

۳-۲-۱ ماتریس‌های خاص

(الف) **ماتریس سطری:** ماتریسی که تنها دارای یک سطراست.

(ب) **ماتریس ستونی:** ماتریسی که تنها دارای یک ستون است. (هر بردار n -بعدی یک ماتریس ستونی است).

(ج) **ماتریس صفر:** ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد. ماتریس صفر از مرتبه $m \times n$ را معمولاً با نماد $O_{m \times n}$ نمایش می‌دهیم.

(د) **ماتریس مربعی**: ماتریسی که در آن تعداد سطر و ستون برابر است. یک ماتریس مربعی $n \times n$ را ماتریس از مرتبه n نامیم و به عناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ **عناصر قطر اصلی** گوئیم.

(ه) **ماتریس قطری**: یک ماتریس مربعی که عناصر خارج قطر اصلی آن همگی صفرند.

(و) **ماتریس اسکالر**: یک ماتریس قطری که تمام عناصر قطر اصلی آن با هم برابر باشند.

(ز) **ماتریس واحد (همانی)**: یک ماتریس اسکالر که همه درایه‌های قطر اصلی آن برابر

یک است. ماتریس همانی از مرتبه n را با I_n نمایش می‌دهیم.

(ح) **ماتریس بالا مثلثی**: ماتریس مربعی که عناصر زیر قطر اصلی آن صفرند.

(ط) **ماتریس پایین مثلثی**: ماتریس مربعی که عناصر بالای قطر اصلی آن صفرند.

مثال ۵-۱

(الف) یک ماتریس سطری 1×4 :

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 1/4 & -1/3 \end{bmatrix}$$

(ب) یک ماتریس ستونی 4×1 :

$$B = \begin{bmatrix} 9/1 \\ 2/7 \\ -10/7 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

(ج) مثال‌هایی از ماتریس صفر:

$$O_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(د) مثال‌هایی از ماتریس مربعی:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 33 \\ 26 & 13 & 0 \\ -491 & 6 & -135 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

(ه) نمایش قطر اصلی در یک ماتریس:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

و) یک ماتریس قطری:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

ز) یک ماتریس اسکالر:

$$F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ح) دو ماتریس واحد:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ط) یک ماتریس بالا مثلثی:

$$G = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ی) یک ماتریس پایین مثلثی:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 4 & 64 & 0 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

۱-۲-۴ اعمال جبری روی ماتریس‌ها

در این بخش به بررسی اعمال مقدماتی جمع، تفریق، ضرب اسکالر و ضرب ماتریسی خواهیم پرداخت.

الف) جمع دو ماتریس: جمع دو ماتریس هم‌مرتبه $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ، ماتریسی مانند $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ است، که در آن $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$\text{به‌طور مثال اگر } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ آنگاه داریم:}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 7 & -3 \\ -3 & 13 & 15 \\ 8 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

ب) ضرب اسکالر در ماتریس: ضرب اسکالر k در ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ را با kA نمایش داده و ماتریسی است که در آن هر درایه ماتریس A ، در عدد k ضرب شده است یعنی: $kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$.

به طور مثال:

$$3 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1/7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ 3 \times 1/7 & 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 5/1 & 6 \end{bmatrix}$$

ج) قرینه یک ماتریس: قرینه ماتریس A را با $-A$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از ضرب اسکالر عدد -1 در ماتریس A .

$$\text{به طور مثال قرینه ماتریس } A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ عبارت است از:}$$

$$-A = -1 \times A = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

د) تفریق دو ماتریس: تفریق دو ماتریس هم‌مرتبه A و B را با نماد $A - B$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از:

$$A - B = A + (-B)$$

$$\text{به عنوان مثال اگر } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ آنگاه داریم:}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -3 & 9 \\ 11 & -3 & -3 \\ 6 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

د) ضرب دو ماتریس: ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ را در نظر می‌گیریم. منظور از حاصل ضرب ماتریس A در ماتریس B ، ماتریسی $m \times p$ مانند C است که $C = [c_{ij}]_{m \times p}$ و درایه واقع در سطر i ام و ستون j ام آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

شایان ذکر است که حاصل ضرب ماتریس A در B را با AB نشان می‌دهیم. در واقع عنصر c_{ij} در ماتریس AB برابر با ضرب نقطه‌ای سطر i ام ماتریس A در ستون j ام ماتریس B است؛ یعنی:

(ستون j ام ماتریس B). (سطر i ام ماتریس A) = (درایه c_{ij} ماتریس AB)

به طور مثال در مورد ضرب دو ماتریس 3×3 اگر داشته باشیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

آنگاه:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

تذکر ۱-۱

ضرب ماتریس A در B همیشه امکان پذیر نیست! این عمل تنها در صورتی انجام پذیر است که تعداد ستون‌های ماتریس A برابر با تعداد سطرهای ماتریس B باشد: