



ریاضی عمومی (۱)

جلیل واعظی

بازنگری و ویرایش: دکتر نازلی بشارتی

امروز کتابخوانی و علم‌آموزی نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است!¹

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه مطالعه هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین سوره‌ای که بر آن فرستاده عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد

1. <https://farsi.khamenei.ir/message-content?id=2696>

شده است: «إِقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره جغرافیایی ایران شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

پیشگفتار یازده

فصل اول. یادآوری تابع و خواص آن ۱

هدف کلی ۱

هدف‌های یادگیری ۱

۱-۱ مفهوم رابطه ۲

۲-۱ تابع ۳

۳-۱ برابری دو تابع ۵

۴-۱ جبر توابع ۶

۵-۱ انواع توابع ۸

۶-۱ تابع وارون ۱۷

خودآزمایی فصل اول ۲۷

پاسخنامه سؤالات متن ۳۰

پاسخنامه خودآزمایی فصل اول ۳۲

فصل دوم. یادآوری حد و پیوستگی توابع ۳۳

هدف کلی ۳۳

هدف‌های یادگیری ۳۳

۱-۲ علامت \sum ۳۴

۲-۲ استقرای ریاضی ۳۵

۳-۲ همسایگی ۳۷

۴-۲ مفهوم حد ۳۸

۴۳	۵-۲ قضایایی درباره حد توابع
۴۹	۶-۲ حدود یک طرفه (حد راست و حد چپ)
۵۴	۷-۲ حدود نامتناهی (توابعی که دارای حد $+\infty$ یا $-\infty$ هستند)
۵۷	۸-۲ حدود در بی نهایت (حد تابع وقتی که متغیر به $+\infty$ و $-\infty$ میل می کند)
۶۲	۹-۲ پیوستگی تابع
۶۹	۱۰-۲ قضیه مقدار میانی
۷۲	خودآزمایی فصل دوم
۷۹	پاسخنامه سؤالات متن
۸۲	پاسخنامه خودآزمایی فصل دوم

فصل سوم. مشتق

۸۵	هدف کلی
۸۵	هدف های یادگیری
۸۶	مقدمه
۸۷	۱-۳ تعریف مشتق
۹۲	۲-۳ قضایای مشتق
۹۶	۳-۳ مشتق یک طرفه
۹۷	۴-۳ مشتق ترکیب توابع و تابع ضمنی
۱۰۰	۵-۳ مشتق توابع مثلثاتی
۱۰۱	۶-۳ مشتق تابع وارون
۱۰۳	۷-۳ مشتق برخی توابع خاص
۱۰۶	۸-۳ توابع هذلولوی و مشتق آن ها
۱۰۹	۹-۳ مشتق مرتبه n ام
۱۱۱	۱۰-۳ دیفرانسیل و مشتق پارامتری
۱۱۷	خودآزمایی فصل سوم
۱۲۱	پاسخنامه سؤالات متن
۱۲۹	پاسخنامه خودآزمایی فصل سوم

فصل چهارم. کاربردهای مشتق

۱۳۳	هدف کلی
۱۳۳	هدف های یادگیری
۱۳۴	۱-۴ ماکسیمم و مینیمم یک تابع
۱۴۵	۲-۴ کاربرد ماکسیمم و مینیمم
۱۴۶	۳-۴ قضایای رول و میانگین
۱۵۳	۴-۴ تقعر، تحدب و نقطه عطف تابع
۱۵۹	۵-۴ کاربردهای مشتق در رسم نمودار یک تابع

۱۶۶	۶-۴ حدهای مبهم
۱۷۶	خودآزمایی فصل چهارم
۱۸۳	پاسخنامه سؤالات متن
۱۸۷	پاسخنامه خودآزمایی فصل چهارم
۱۹۱	فصل پنجم. انتگرال
۱۹۱	هدف کلی
۱۹۱	هدفهای یادگیری
۱۹۲	۱-۵ انتگرال نامعین
۱۹۷	۲-۵ انتگرال گیری به روش تغییرمتغیر
۲۰۰	۳-۵ انتگرال گیری به روش جزءبه جزء
۲۰۵	۴-۵ روش انتگرال گیری برخی از توابع مثلثاتی
۲۱۰	۵-۵ انتگرال گیری به وسیله تغییرمتغیر مثلثاتی
۲۱۳	۶-۵ انتگرال گیری به روش کسرهای ساده
۲۲۵	خودآزمایی فصل پنجم
۲۲۹	پاسخنامه سؤالات متن
۲۳۶	پاسخنامه خودآزمایی فصل پنجم
۲۳۹	فصل ششم. انتگرال معین و انتگرال ناسره
۲۳۹	هدف کلی
۲۳۹	هدفهای یادگیری
۲۴۰	۱-۶ انتگرال معین
۲۴۷	۲-۶ خواص انتگرال معین و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال
۲۶۱	۳-۶ انتگرال ناسره
۲۷۲	۴-۶ تعیین نوع انتگرال ناسره
۲۷۴	خودآزمایی فصل ششم
۲۸۲	پاسخنامه سؤالات متن
۲۸۵	پاسخنامه خودآزمایی فصل ششم
۲۸۷	فصل هفتم. کاربردهای انتگرال معین
۲۸۷	هدف کلی
۲۸۷	هدفهای یادگیری
۲۸۸	۱-۷ محاسبه مساحت
۲۹۹	۲-۷ حجم یک جسم دوار
۳۱۱	۳-۷ طول منحنی
۳۱۵	۴-۷ مساحت یک سطح دوار

۳۲۰ ۵-۷ کار
۳۲۲ ۶-۷ مسافت پیموده شده توسط یک متحرک
۳۲۴ ۷-۷ گشتاورها و مرکز جرم
۳۳۶ خودآزمایی فصل هفتم
۳۳۹ پاسخنامه سؤالات متن
۳۴۲ پاسخنامه خودآزمایی فصل هفتم
۳۴۳ فصل هشتم. دستگاه مختصات قطبی
۳۴۳ هدف کلی
۳۴۳ هدف‌های یادگیری
۳۴۴ ۱-۸ دستگاه مختصات قطبی
۳۴۷ ۲-۸ رابطه بین دستگاه مختصات قطبی و دکارتی
۳۵۰ ۳-۸ نمودار معادلات قطبی
۳۵۷ ۴-۸ محل تلاقی دو منحنی قطبی
۳۵۹ ۵-۸ مساحت نمودارهای قطبی
۳۶۳ ۶-۸ طول قوس یک منحنی قطبی
۳۶۵ خودآزمایی فصل هشتم
۳۶۶ پاسخنامه سؤالات متن
۳۷۲ پاسخنامه خودآزمایی فصل هشتم
۳۷۳ فصل نهم. اعداد مختلط
۳۷۳ هدف کلی
۳۷۳ هدف‌های یادگیری
۳۷۴ مقدمه
۳۷۵ ۱-۹ دستگاه اعداد مختلط
۳۷۶ ۲-۹ یکه موهومی (i)
۳۷۶ ۳-۹ اعمال جبری بر روی اعداد مختلط
۳۷۸ ۴-۹ مزدوج یک عدد مختلط
۳۷۹ ۵-۹ نمایش هندسی اعداد مختلط
۳۸۲ ۶-۹ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط
۳۸۶ ۷-۹ توان در اعداد مختلط
۳۸۷ ۸-۹ ریشه‌گیری از اعداد مختلط
۳۹۲ ۹-۹ معادلات خط و دایره در صفحه مختلط
۳۹۳ خودآزمایی فصل نهم
۳۹۷ پاسخنامه سؤالات متن
۴۰۰ پاسخنامه خودآزمایی فصل نهم

پیوست ۱. مسائل حل شده.....	۴۰۳
پاسخ‌های تشریحی ۱۶۵ مسئله.....	۴۳۱
پیوست ۲. ضمائم.....	۴۵۹
نمودار برخی از توابع.....	۴۵۹
جدول الفبای یونانی.....	۴۶۶
فرمول‌های مهم مشتق‌گیری.....	۴۶۷
فرمول‌های مهم انتگرال‌گیری.....	۴۶۸
منابع.....	۴۷۴

پیشگفتار

کتاب «ریاضی عمومی (۱)» که هم‌اکنون در اختیار شما قرار دارد، با هدف فراهم آوردن منبعی آموزشی برای اکثر رشته‌های دانشگاهی که با مباحث ریاضیات سروکار دارند، تألیف شده است. هرچند یادگیری این درس نیازمند حضور در کلاس، تبادل نظر و رفع اشکال توسط استادان محترم است، اما تلاش شده تا این اثر به گونه‌ای تدوین شود که قابلیت خودآموزی داشته باشد.

با گذشت چند سال از انتشار این کتاب، نیاز به بازنگری و اصلاح آن به وضوح احساس می‌شد. نقدها و پیشنهادهای استادان و دانشجویان و ایراداتی که در نسخه قبلی بود، ما را بر آن داشت تا نسخه جدیدی از کتاب را آماده کنیم. نسخه حاضر حاصل بازنگری و ویرایش علمی دقیق است؛ از این‌رو، در مقایسه با چاپ‌های پیشین، تغییراتی در ترتیب فصول و محتوای هر فصل صورت گرفته است. برخی فصل‌ها به‌طور کامل بازنویسی شده و مطالب تازه‌ای افزوده گردیده است. در تمامی فصل‌ها، تمرین‌ها و مطالب تازه‌ای افزوده و برخی بخش‌ها حذف شده‌اند. همچنین خطاها و غلط‌های علمی و تایپی چاپ‌های پیشین اصلاح شده و منابع جدیدی معرفی شده‌اند تا کتاب بتواند با نیازهای آموزشی امروز هماهنگ‌تر باشد.

این نسخه تجدیدنظرشده شامل نه فصل است. در سراسر کتاب فرض بر آن است که دانشجویان با مبانی ریاضیات پیش‌دانشگاهی آشنایی دارند؛ با این حال، در موارد لازم برخی مفاهیم پایه به اختصار یادآوری شده است. در ابتدای هر فصل، اهداف

آموزشی آن فصل ارائه شده است تا مطالعه آن‌ها پیش از آغاز فصل، دیدی کلی از محتوای پیش‌رو در اختیار دانشجو قرار دهد. در نگارش مطالب، پس از ارائه هر تعریف یا قضیه، مثال‌های متنوع و کاربردی ذکر شده است تا مفاهیم به‌صورت روشن و قابل فهم تبیین شوند. سپس یک یا چند تمرین مطرح گردیده است که انتظار می‌رود دانشجو آن‌ها را به‌صورت مستقل حل کرده و پاسخ‌های خود را با پاسخ‌های ارائه شده در پایان هر فصل مقایسه نماید. پس از آن، مطالب جدید ادامه می‌یابند. در پایان هر فصل نیز مجموعه‌ای از سؤالات به‌عنوان خودآزمایی ارائه شده است. این سؤالات، ضمن مرور نکات اساسی تعاریف و قضایا، ابزاری برای سنجش میزان یادگیری دانشجو محسوب می‌شوند. از این‌رو توصیه می‌شود پس از مطالعه هر فصل، آموخته‌های خود را با پاسخ‌گویی به این سؤالات ارزیابی کنید. پاسخ سؤالات خودآزمایی در انتهای هر فصل درج شده است.

محتوای فصول کتاب به شرح زیر است:

فصل اول به مرور مفاهیم رابطه و تابع، انواع توابع، عملیات جبری روی توابع، یک‌به‌یک و پوشا بودن توابع و نحوه به‌دست آوردن وارون تابع اختصاص دارد. همچنین توابع خاص نظیر تابع نمایی، لگاریتمی و توابع مثلثاتی در این فصل یادآوری شده‌اند. در فصل دوم، مفهوم حد توابع و قضایای مهم مرتبط با آن، به‌همراه مفهوم پیوستگی و مسائل مربوط به آن بررسی شده است. در فصل سوم، مفهوم اساسی مشتق از طریق دو مسئله کلاسیک مماس بر یک منحنی و سرعت یک جسم متحرک معرفی می‌شود. سپس خواص توابع مشتق‌پذیر و قضایای مرتبط با آن‌ها بررسی شده و فرمول‌های مشتق‌گیری برخی توابع بیان می‌گردد. در ادامه، مفهوم دیفرانسیل تابع نیز مطرح شده است. در فصل چهارم، کاربردهای متنوع مشتق از جمله تعیین نقاط ماکسیمم، مینیمم و نقطه عطف، مسائل مربوط به آن‌ها و روش رسم نمودار توابع ارائه شده است. همچنین قضایای مهم رول و مقدار میانگین و کاربردهای آن‌ها بیان شده و حل حدهای مبهم مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل پنجم، انتگرال نامعین معرفی شده و روش‌های مختلف انتگرال‌گیری که از مهم‌ترین مباحث محاسباتی حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌شمار می‌روند، از جمله روش تغییرمتغیر و روش جزء‌به‌جزء تشریح شده‌اند. فصل ششم به معرفی مفهوم انتگرال معین با تکیه بر تفسیر مساحتی اختصاص دارد. خواص انتگرال‌های معین و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال از دیگر مباحث این

فصل هستند. افزون بر این، انتگرال‌های ناسره و مفهوم همگرایی و واگرایی آن‌ها نیز بررسی شده‌اند. در فصل هفتم، کاربردهای انتگرال معین در محاسبه سطح، حجم، طول، کار، مسافت، گشتاور و مرکز جرم مطالعه شده است. در فصل هشتم، دستگاه مختصات قطبی معرفی شده و ویژگی‌های آن و رابطه آن با دستگاه مختصات دکارتی بیان گردیده است. همچنین روش رسم نمودارهای قطبی و کاربردهای آن‌ها بررسی شده و در پایان فصل، محاسبه مساحت، حجم و سایر کمیت‌ها برای منحنی‌های قطبی ارائه شده است. در فصل نهم، مجموعه اعداد مختلط که تعمیمی از مجموعه اعداد حقیقی محسوب می‌شود، معرفی شده و اعمال جبری، نمایش‌های هندسی و مثلثاتی این اعداد مورد بحث قرار گرفته است.

به منظور تعمیق یادگیری، در پایان کتاب ۱۶۵ مسئله حل شده از نوع کاربردی، مفهومی، نظری و محاسباتی ارائه شده است. همچنین در بخش پیوست، جداولی شامل مهم‌ترین فرمول‌های مشتق و انتگرال، الفبای یونانی و نمودار توابع پرکاربرد کتاب ضمیمه گردیده است. حل مسائل و پاسخ‌گویی به سؤالات متن و خودآزمایی‌های پایان هر فصل، نقش اساسی در تثبیت و تعمیق یادگیری این درس دارد. از این رو توصیه می‌شود دانشجویان با دقت و حوصله کافی به حل آن‌ها پرداخته و در نهایت برای اطمینان از صحت پاسخ‌ها، به بخش پاسخ‌ها مراجعه نمایند.

امید است این نسخه بازنگری شده بتواند بیش از پیش مورد استفاده دانشجویان و علاقه‌مندان قرار گیرد. در پایان، لازم می‌دانم از مدیریت محترم تدوین و انتشارات دانشگاه و کارشناسان محترم تدوین، که با اقدامات ارزشمند خود زمینه آماده‌سازی و انتشار این اثر را فراهم ساختند، صمیمانه قدردانی نمایم. همچنین از اساتید محترم دانشجویان گرامی تقاضا می‌شود در صورت مشاهده هرگونه اشکال یا کاستی که نیازمند اصلاح در چاپ‌های آتی است، پیشنهادها و دیدگاه‌های خود را از طریق نشانی پست الکترونیکی زیر ارسال فرمایند.

نازلی بشارتی

nbesharati@pnu.ac.ir

فصل اول

یادآوری تابع و خواص آن

هدف کلی

هدف کلی این فصل، یادآوری مطالب مربوط به تابع و خواص آن است، که در فصل‌های بعدی از آن استفاده می‌شود.

هدف‌های یادگیری

پس از مطالعه و فراگیری این بخش باید بتوانید:

۱. زوج مرتب و رابطه را تعریف کنید.
۲. تابع را تعریف کنید و از میان رابطه‌های داده شده توابع را مشخص کنید.
۳. دامنه توابع داده شده را به دست آورید.
۴. برابری دو تابع را تعریف کنید.
۵. با در اختیار داشتن دو تابع توابع جدیدی از مجموع، تفاضل، حاصلضرب، خارج قسمت و ترکیب آن‌ها بسازید و دامنه آن‌ها را مشخص کنید.
۶. تابع حقیقی، تابع ثابت، تابع همانی، تابع خطی، تابع فاکتوریل، تابع قدر مطلق و تابع جزء صحیح را تعریف کنید.
۷. تابع فرد و تابع زوج را تعریف کنید و برای هر یک مثالی بیاورید.
۸. تابع نمایی را تعریف کنید.

۹. لگاریتم یک عدد مثبت را تعریف کنید و از قضیه‌های لگاریتم در حل مسائل استفاده نمایید.

۱۰. لگاریتم نپری را بیان کنید و رابطه آن را با لگاریتم اعشاری بنویسید.

۱۱. تابع مثلثاتی را تعریف کنید و از اتحادهای مثلثاتی در حل مسائل استفاده نمایید.

۱۲. توابع یک‌به‌یک، توابع پوشا، توابع صعودی، توابع نزولی و توابع کراندار را

تعریف کنید و برای هر یک مثالی بیاورید و با در اختیار داشتن توابع با ضابطه‌های معین، یک‌به‌یک و پوشا بودن آن‌ها را مشخص کنید.

۱۳. وارون توابع داده شده را در صورت وجود به دست آورید.

۱-۱ مفهوم رابطه

مجموعه $\{a, b\}$ را در نظر می‌گیریم. چون در تعریف برابری مجموعه‌ها، ترتیب اعضا اهمیت ندارد، این مجموعه برابر مجموعه $\{b, a\}$ است؛ اما گاهی نیز لازم است، مجموعه‌هایی با دو عنصر در نظر بگیریم که در آن‌ها ترتیب اهمیت داشته باشد. مثلاً در هندسه تحلیلی، مختصات (x, y) یک نقطه، نمایشگر زوج مرتبی از عددها است. نقطه $(1, 3)$ غیر از نقطه $(3, 1)$ است.

تعریف ۱-۱-۱. دسته‌ای از اشیاء دوتایی با ترتیب معین را زوج مرتب می‌گوییم. در زوج مرتب (x, y) ، x را مختص اول (مؤلفه اول) و y را مختص دوم (مؤلفه دوم) می‌نامیم. دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) را برابر می‌گوییم اگر و تنها اگر $a = c$ و $b = d$. در ریاضیات مکرر به عبارتهایی نظیر عبارتهای زیر بر می‌خوریم:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{و} \quad xy = 5 \quad \text{و} \quad x < 2y$$

که هریک از آن‌ها مجموعه مشخصی از زوج‌های مرتب عددهای حقیقی را معین می‌کند، یعنی مجموعه همه زوج‌های مرتبی مانند (x, y) که در آن عبارت صدق می‌نمایند.

یادآوری تابع و خواص آن ۳

تعریف ۱-۱-۲. هر مجموعه از زوج‌های مرتب را یک رابطه دوتایی یا یک رابطه می‌نامیم. اگر R یک رابطه باشد و $(x, y) \in R$ ، آنگاه می‌نویسیم xRy و می‌خوانیم x رابطه R به y دارد یا بین x و y رابطه R برقرار است.

مثال ۱-۱-۳.

(الف) مجموعه $\{(انکارا و ترکیه) و (پاریس و فرانسه) و (تهران و ایران)\}$ $R =$ یک رابطه است و هر یک از زوج‌های مرتب داخل آکولاد یک عضو آن می‌باشد، مثلاً $R \in$ (پاریس و فرانسه).

(ب) هر یک از مجموعه‌های زیر یک رابطه است:

$$f = \{(x, y) \mid x, y \in R, y = 3x + 1\}, R = \{(a, b), (3, 4)\}$$

$$g = \{(x, y) \mid x, y \in R, x^2 + y^2 = 9\}$$

به هر رابطه دو مجموعه مهم وابسته است که در زیر تعریف می‌کنیم:

فرض کنیم R یک رابطه باشد.

(الف) مجموعه همه مختصات اول عناصر R را حوزه تعریف یا دامنه R گفته و آن را با $\text{dom}R$ نشان می‌دهیم.

(ب) مجموعه همه مختصات دوم عناصر R را حوزه مقادیر یا برد R گفته و آن را با $\text{Rang}R$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۱-۴. فرض کنیم $R = \{(5, 4), (3, 1), (4, 7)\}$ داریم:

$$\text{dom}R = \{5, 3, 4\} \quad \text{Rang}R = \{4, 1, 7\}$$

۲-۱ تابع

در این بخش یک دسته خاص از رابطه‌ها که تابع نامیده می‌شوند معرفی می‌کنیم. قبل از تعریف دقیق تابع مثالی می‌آوریم. در رابطه $R = \{(2, 5), (2, 6), (6, 7)\}$ ، زوج‌های مرتب $(2, 5) \in R$ و $(2, 6) \in R$ دارای مختص اول یکسان هستند ولی مختصات دومشان متفاوت است، اما رابطه $F = \{(2, 5), (4, 1), (2, 1), (0, 5)\}$ دارای

این خاصیت است که هر دو عضو آنکه مختصات اولشان با هم برابرند مختصات دومشان نیز با هم برابرند به عبارت دیگر، اگر $(x, y) \in f$ و $(x, z) \in f$ ، آنگاه $y = z$. چنین رابطه‌ای را تابع گویند.

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنیم دامنه رابطه f مجموعه A باشد، رابطه f را یک تابع از A به B می‌گوییم:

اگر برای هر عنصر $x \in A$ عنصری (منحصربه‌فرد) مانند $y \in B$ وجود داشته باشد، به طوری که $(x, y) \in f$. به عبارت دیگر f هر یک از عناصر A را تنها به یک عنصر از B نسبت دهد. (به ازای هر ورودی فقط یک خروجی مشخص داشته باشد.) می‌توان تعریف تابع را به صورت زیر نیز بیان کرد:

اگر دامنه رابطه f مجموعه A باشد، شرط لازم و کافی برای آنکه رابطه f تابع باشد، آن است که: اگر $(x, y) \in f$ و $(x, z) \in f$ آنگاه $y = z$.

دامنه تابع f را با نماد D_f و برد آن را با نماد R_f نشان می‌دهیم. از تعریف تابع معلوم می‌شود که به ازای هر x از دامنه f ، تنها یک عنصر مانند y هست که $(x, y) \in f$. y را مقدار f در نقطه x می‌نامیم و به جای $(x, y) \in f$ می‌نویسیم $x.y = f(x)$. x را متغیر مستقل و $f(x)$ را متغیر وابسته یا تصویر x توسط f می‌نامیم. معمولاً روش کلی مشخص کردن یک تابع این است که اولاً دامنه تابع را مشخص می‌کنند، ثانیاً ضابطه‌ای برای تعیین مقدار تابع به ازای هر عضو دامنه به دست می‌دهند. به عنوان مثال:

تابع $f = \{(x, 2x-1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = 2x-1\}$ را که دامنه برد آن اعداد حقیقی است به صورت زیر نشان می‌دهیم: $f(x) = 2x-1, x \in \mathbb{R}$.

تابع $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), \dots, (n, n^2)\}$ را که دامنه و برد آن اعداد طبیعی است می‌توان به صورت زیر نشان داد: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x^2$.

تمرین ۱-۲-۲. کدام یک از روابط زیر یک تابع است؟ دلیل آن را بیان کنید.

$$1. f = \{(1, 2), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 3), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 4)\}$$

$$۲. g = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x < 2y\}$$

$$۳. h = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y^2 - x^2 = 9\}$$

$$۴. k = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = \frac{3}{x^2 + 4}\}$$

گاهی پیش می‌آید که در تابع $y = f(x)$ نقش x را به متغیر دیگری محول کنیم، مثلاً وقتی می‌گوییم $f(5x)$ یعنی $5x$ در نقش x است.

مثال ۱-۲-۳. فرض کنیم $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ، می‌خواهیم مقادیر $f(0)$ ، $f(-x)$ و $f(x+1)$ را تعیین کنیم.

$$f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = \frac{-x}{x+2}, \quad f(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1, \quad f(-x) = \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \frac{1+x}{1-x}$$

تمرین ۱-۲-۴.

۱. در تابع $f(x) = x^2$ عبارت $\frac{f(x+2) - f(2)}{2}$ را حساب کنید.

۲. در تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ مقادیر $f(4)$ ، $f(x+4)$ ، $f(x^2+4)$ و $f(f(2))$ را محاسبه کنید.

۱-۳-۳-۱ برابری دو تابع

دو تابع f و g را برابر می‌گوییم، اگر:

۱. دامنه آن‌ها برابر باشد، یعنی $D_f = D_g$.

۲. به ازای هر x از دامنه مشترک آن‌ها مقدار دو تابع برابر باشند یعنی $f(x) = g(x)$.

مثال ۱-۳-۱. توابع $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$ و $g(x) = x + 2$ برابر نیستند زیرا $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ و

$D_g = \mathbb{R}$ یکی نیستند. اما توابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2(x^2 + 1)}$ و $g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ برابرند، زیرا

$$D_f = D_g = \mathbb{R} \quad \text{به‌الوه به ازای هر } x \text{ از } \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$$

تمرین ۱-۳-۲. در هریک از تمرین‌های زیر دو تابع داده شده است. تعیین کنید آیا این توابع مساوی هستند یا نه؟

$$1. \quad g(x) = \frac{x-2}{x-2}, \quad f(x) = 1$$

$$2. \quad g(x) = \frac{2x+1}{4x^2-1}, \quad x \in \{4, 7\}, \quad f(x) = \frac{1}{2x-1}, \quad x \in \{4, 7\}$$

۱-۴ جبر توابع

تعریف ۱-۴-۱. فرض کنیم f و g توابعی با دامنه‌های D_f و D_g باشند توابع جدید

$$f+g, f-g, f \cdot g, \frac{f}{g}$$

را به ترتیب مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و خارج قسمت

f و g می‌نامیم و آن‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D_f \cap D_g, \quad g(x) \neq 0$$

مثال ۱-۴-۲. فرض کنیم $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{2-x}$ ، در این صورت:

$$D_g = \{x \mid 2-x \geq 0\} = (-\infty, 2] \quad \text{و} \quad D_f = \{x \mid x-1 \geq 0\} = [1, +\infty)$$

بنابراین دامنه توابع $f+g$ و $f-g$ و $f \cdot g$ عبارت است از:

$$D_f \cap D_g = [1, +\infty) \cap (-\infty, 2] = [1, 2]$$

برابر است با $[1, 2]$ داریم:

$$(f \pm g)(x) = \sqrt{x-1} \pm \sqrt{2-x}, \quad x \in [1, 2]$$

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{(x-1)(2-x)}, \quad x \in [1, 2]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}, \quad x \in [1, 2)$$

۷ یادآوری تابع و خواص آن

تعریف ۱-۴-۳. برای دو تابع f و g ، ترکیب دو تابع، که با $f \circ g$ نمایش داده می‌شود، به وسیله $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تعریف می‌شود و دامنه آن عبارت است از:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

به همین ترتیب تابع $g \circ f$ به وسیله $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ تعریف می‌شود و دامنه آن عبارت است از:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مثال ۱-۴-۴. توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 - 1$ را در نظر بگیرید. توابع زیر همچنین دامنه آن‌ها را به دست آورید.

الف) $f \circ g$

ب) $g \circ f$

پ) $f \circ f$

ت) $g \circ g$

دامنه f عبارت است از: $[0, +\infty)$ و دامنه g برابر است با $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

الف) دامنه $f \circ g$ عبارت است از:

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \in [0, +\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\text{و } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1}$$

ب) دامنه $g \circ f$ عبارت است از: $D_{g \circ f} = \{x \in [0, +\infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$ و

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$$

پ) دامنه $f \circ f$ عبارت است از: $D_{f \circ f} = \{x \in [0, +\infty) \mid \sqrt{x} \in [0, +\infty)\} = [0, +\infty)$ و

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{\sqrt{x}}) = \sqrt[4]{x}$$

ت) دامنه $g \circ g$ عبارت است از: $D_{g \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \in \mathbb{R}\} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ و

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$$

مثال ۱-۴-۵. توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = -x^2$ را در نظر بگیرید. توابع زیر همچنین دامنه آن‌ها را به دست آورید.

الف) $f \circ g$

ب) $g \circ f$